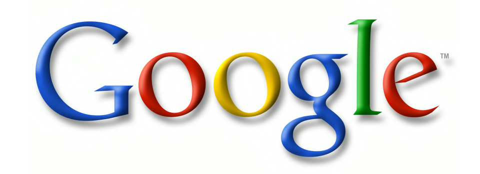
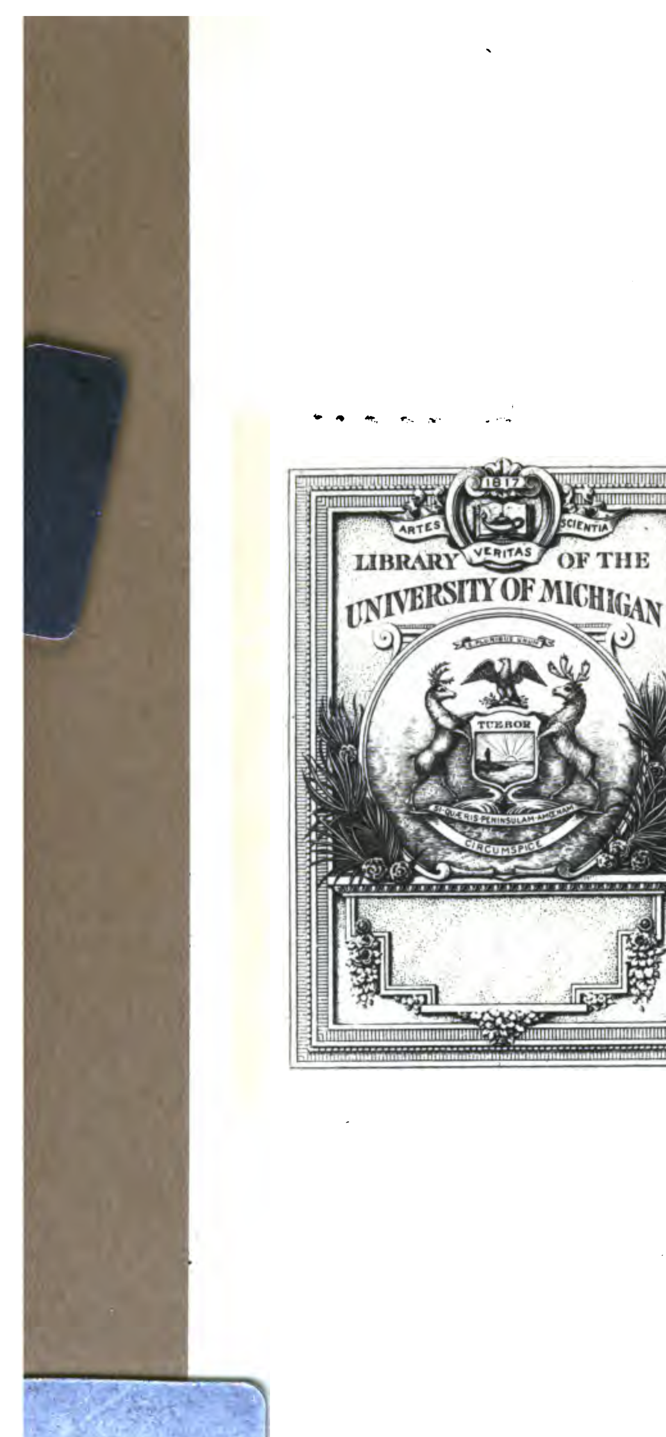




ÜBER BERNOULLI'SCHE ZAHLEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOCTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU GÖTTINGEN

VON

GUSTAV FERDINAND MEYER.

GÖTTINGEN,

DRUCK DER UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON E. A. HUTH.

1859.

SEINEM GELIEBTEN FREUNDE

ADOLPH DETTE

AUS WERNIGERODE

ZU BERLIN

D. VERF.

Unter den Forschungen, welche Jacob Bernoulli in seiner „Ars conjectandi" niedergelegt hat, findet sich auch eine Untersuchung über die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen. Interessant ist dieselbe in doppelter Hinsicht. Nicht bloss wurde hier zuerst die Summirung der genannten Potenzen gelehrt, nein auch jenen merkwürdigen Zahlen, welche man ihrem Erfinder zu Ehren die Bernoulli'schen Zahlen nennt, wurde durch diese Betrachtung gleichsam das Dasein gegeben. Diese Zahlen, welche die Endcoefficienten in Sx^2, Sx^4 u. s. f. darstellen [1]), welche ferner bei der Summirung der reciproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen, sowie bei der Entwicklung von $\cot x$, $\tang x$, $\operatorname{cosec} x$ nach Potenzen von x, überhaupt bei vielen Reihenentwicklungen auftreten, diese Zahlen zeichnen sich besonders noch durch höchst merkwürdige Relationen untereinander und durch andere bemerkenswerthe Eigenschaften aus. Dies Alles dürfte mithin das Interesse erklären, welches die Mathematiker, ja selbst Mathematiker des ersten Ranges, wie z. B. Euler, Laplace, Abel u. s. w. dieser Zahlengruppe zugewandt haben.

Was die Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen betrifft, so ist zu erwähnen, dass sie auf verschiedene Weise abgeleitet werden können. Unter den anwendbaren Methoden aber ist besonders der von Hr. Prof. Stern zuerst angegebene Weg [2]) hervorzuheben; denn nicht allein die bekannteren, sondern auch neue Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen lassen sich mit geringer Mühe durch dieses Stern'sche Verfahren erzielen. Sein Wesen besteht der Hauptsache nach in Folgendem. Bedeutet der Ausdruck $f^{2n}(0)$ den Werth des $2n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $fz = \frac{z}{e^z - 1}$ für das Argument $z = 0$, drückt

---

[1]) Der Kürze halber bezeichnen wir die Summe der n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis x mit $Sx^n = S^n(x)$.

[2]) „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" v. Stern. S. 34.

ferner B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl aus, so existirt — wie man weiss — die Gleichung

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1}.\, B_n\,.$$

Diese längst bekannte Beziehung aber ist es, welche bei dem Stern'schen Gedankengange die Basis der Untersuchungen bildet.

Die vorliegende Abhandlung soll die weitere Ausführung der von Stern nur im Vorbeigehen erwähnten Idee zum Zweck haben, zugleich aber noch einige andere Betrachtungen hinzufügen.

§. 1.

Aufstellung der Definitionsgleichung für die Bernoulli'schen Zahlen.

Wie bekannt, wird in der Analysis gezeigt, dass für beliebige reelle Werthe von x die Beziehungen gelten:

$$1.\quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots\ldots$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Geht man von den Zahlen zu den Logarithmen über, so entspringt

$$l\frac{\sin x}{x} = l\left(1-\frac{x^2}{3!}+\ldots\right) = l\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+\ldots$$

Bedenkt man nun aber, dass für alle Werthe von v, welche der Bedingung genügen $1 \overset{>}{=} v > -1$ [1]),

$$l\,(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \ldots\ldots$$

ist, so ergiebt sich weiter für Zahlenwerth $x < \pi$

$$l\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.\right)$$

$$-\frac{x^4}{2\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots.\right)$$

$$-\frac{x^6}{3\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots.\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$-\frac{x^{2n}}{n\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots.\right)$$

etc. etc.

---

[1]) Cauchy Analysis. Kap. 6. §. 4. Formel 26. S. 126.

Andererseits erhält man

$$l\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)=l\left(1-\frac{x^2}{3!}\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)\right)$$

$$=-\frac{x^2}{1.2.3}\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1.2.3}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)^2$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1.2.3}\right)^3\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$-\frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{1.2.3}\right)^n\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)^n$$

etc. etc.

Weil nun die Horizontalreihen das Kennzeichen der Convergenz an sich tragen [1]), weil ferner die Summen derselben unter der angegebenen Bedingung ebenfalls eine convergirende Reihe bilden, und weil endlich dies Alles noch Statt findet, sofern man die Glieder auf ihre Zahlenwerthe reducirt: so kann man, indem man die Potenzen entwickelt und die mit gleich hohen Potenzen von x behafteten Glieder zusammenstellt, nach einem bekannten Satze [2]) der vorstehenden Reihe folgende Form geben:

$$l\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{2^2.3^2}$$
$$-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^6}{2^2.3^2.4.5}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{2^3.3^3}$$
$$+\frac{x^8}{9!}-\frac{x^8}{2^2.3^2.4.5.6.7}\ldots$$
$$-\quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Zieht man die Glieder zusammen, so kommt

$$l\frac{\sin x}{x}=-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{2x^2}{1.2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{30}\cdot\frac{2^3x^4}{4!}-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{42}\cdot\frac{2^5x^5}{6!}$$
$$-\quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$ [3]).

---

[1]) a. a. O. K. 6. §. 4. Lehrsatz 4.

[2]) a. a. O. Note 7. Lehrsatz 2.

[3]) Dass man $l\frac{\sin x}{x}$ auch nach dem Maclaurin'schen Satze hätte entwickeln können, versteht sich von selbst. Auch leuchtet sofort ein, da $l\frac{\sin x}{x}$ eine gerade Function von x ausdrückt, dass alsdann sämmtliche Derivirten mit ungeradem Index, sowie $l\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ verschwinden.

Bedenkt man jetzt, dass eine stetige Function nur auf eine Weise in eine nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen fortgehende Reihe entwickelt werden kann [1]), so folgt, dass in den beiden Entwicklungen von $l\,\frac{\sin x}{x}$ die Coefficienten gleichhoher Potenzen von x gleichbedeutend sein müssen.

Daher die Gleichungen

$$\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\dots\right)=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{2}{1.2},$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\dots\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{30}\cdot\frac{2^3}{1.2.3.4},$$

$$\frac{1}{3\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\dots\right)=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{42}\cdot\frac{2^5}{1.2.3.4.5.6},$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$\frac{1}{n\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots\right)=\frac{1}{n}\,.\,B_n\,.\,\frac{2^{2n-1}}{2n!}.$$

D. h.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{2}{1.2}\,\pi^2=B_1\,.\,\frac{2\,\pi^2}{1.2}.$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots=\tfrac{1}{30}\cdot\frac{2^3\,\pi^4}{4!}=B_2\,.\,\frac{2^3\,\pi^4}{4!},$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots=B_n\,.\,\frac{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}{1.2.3\dots 2n}.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots \text{ mit } S\,\frac{1}{1^{2n}}=S_{2n},$$

so wird also $S\,\frac{1}{1^{2n}}$ dargestellt durch $\frac{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}{1\dots 2n}\,B_n$, oder Bn durch

$$\text{I.}\quad B_n=\frac{1.2.3\dots 2n}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}\,S_{2n}.$$

Da nun die Factoren $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$.... mit den Endcoefficienten in Sx^3 u. s. f. gleichbedeutend sind und beziehungsweise die erste, zweite, dritte .... Bernoulli'sche Zahl genannt werden, so wollen wir nach Analogie den Factor Bn mit dem Namen der n^{ten} Bernoulli'schen Zahl belegen, überhaupt also unter einer Bernoulli'schen Zahl jede Grösse verstehen, welche eine Gleichung von der Form I. befriedigt.

---

[1]) Auf diesen Satz werden wir in dem Nachfolgenden fast immer zu recurriren haben; es möge desshalb seine einmalige Anführung genügen.

§. 2.

Beweis der Gleichung $f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_n$ etc.

Aus der vorstehenden Definition der Bernoulli'schen Zahlen ergeben sich nun unmittelbar die folgenden beiden Eigenschaften derselben. Zunächst nämlich versteht sich gleichsam von selbst, dass sämmtliche Bernoulli'sche Zahlen das Pluszeichen führen. Und dann leuchtet ebenso leicht ein, dass eine aus diesen Werthen gebildete Reihe zu den divergirenden gehört. Den Grad der Divergenz selbst würde man dabei ganz wie Euler in den „Institutiones calculi diff. P. II. §. 129." bestimmen.

Dies vorausgeschickt, gehen wir nunmehr zu unserer obigen Gleichung

$$l(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{5!} - \ldots) = -\frac{x^2}{\pi^2} S_2 - \frac{x^4}{2\pi^4} S_4 - \text{etc.}$$

oder, falls wir der Bequemlichkeit wegen x^2 mit u vertauschen, zu

$$\log(1 - \frac{u}{3!} + \frac{u^2}{5!} - \ldots) = -\frac{u}{\pi^2} S_2 - \frac{u^2}{2\pi^4} S_4 - \text{etc.} \qquad 2.$$

zurück. Erwägen wir nun aber, dass

$$nA_n = na_n + (n-1)\, a_{n-1} A_1 + \ldots\ldots + a_1 A_{n-1} \qquad 3.$$

ist, sofern die Beziehung gilt

$$\log(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_n u^n + \ldots) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \qquad 3^a$$

so wird bei Anwendung der Recursionsformel 3 auf 2

$$A_n = (-1)^n . \frac{1}{1.2.3\ldots 2n+1},$$

$$a_n = -\frac{1}{n} . \frac{1}{\pi^{2n}} S \frac{1}{1^{2n}}$$

zu setzen sein, mithin die Gleichung entspringen

$$(-1)^n . \frac{n}{2n+1!} = -\frac{n}{n} . \frac{1}{\pi^{2n}} S_{2n} + \frac{1}{3!} . \frac{n-1}{n-1} . \frac{1}{\pi^{2n-2}} S_{2n-2}$$

$$- \frac{1}{2.3.4.5} . \frac{n-2}{n-2} . \frac{1}{\pi^{2(n-2)}} S_{2n-4} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n . \frac{1}{\pi^2} S_2 . \frac{1}{2n-1!}.$$

Nun ergiebt sich aber aus I, dass

$$\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} = \frac{2^{2n-1} B_n}{1.2.3\ldots 2n}$$

ist. Substituirt man sonach für $\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}}, \frac{S_{2n-2}}{\pi^{2n-2}}, \ldots$ die entsprechenden Werthe, so folgt

4. $$\frac{2^{2n-1}B_n}{2n!} - \frac{2^{2n-3}B_{n-1}}{2n-2!} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{2^{2n-5}B_{n-2}}{2n-4!} \cdot \frac{1}{5!} \cdot - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{2B_1}{2n-1!} \cdot \frac{1}{1.2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1!} = 0.$$

Zu derselben Recursionsformel, welche wir soeben aufstellten, gelangen wir auch durch folgende Betrachtung. Vertauschen wir nämlich in dem Ausdrucke

$$fz = \frac{z}{e^z - 1},$$

der für $2\pi > z > -2\pi$ in eine convergente Reihe sich entwickeln lässt [1]), die Veränderliche z mit $2z$, so kommt

$$fz = \frac{e^z + 1}{2} f2z.$$

Und hieraus folgt nach dem Maclaurin'schen Satze

$$fz = fo + \frac{z}{1}f^1(o) + \frac{z^2}{1.2}f^2(o) + \ldots + \frac{z^{2n}}{2n!}f^{2n}(o) + \ldots$$

$$= [1 + \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{2.1.2} + \frac{z^3}{2.1.2.3} + \ldots + \frac{z^{2n}}{2.1.2\ldots 2n} + \ldots][fo + \frac{2z}{1}f^1(o) + \ldots].$$

Da nun aber, wenn $fz = \dfrac{1}{1 + \frac{z}{1.2} + \ldots} = 1 - \dfrac{1}{1.2}z + R$ gesetzt wird, der Ausdruck

$$R = \frac{z(e^z + 1)}{1.2.(e^z - 1)} - 1$$

für z und $-z$ den nämlichen Werth besitzt, R also zur Klasse der sogenannten geraden Functionen gehört, so kann offenbar R nur gerade Potenzen von z enthalten. Mithin müssen die Coefficienten $f^3(0)$, $f^5(0)$, überhaupt alle Coefficienten von der Form $f^{2m+1}(0)$, wo m eine ganze Zahl > 0 ausdrückt, der Null gleich sein; daher die Gleichung

5. $$1 - \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2}f^2(0) + \frac{z^4}{4!}f^4(0) + \ldots + \frac{z^{2n}}{2n!}f^{2n}(0) + \ldots\ldots$$
$$= [1 + \frac{z}{2.1} + \frac{z^2}{2.1.2} + \ldots][1 - z + \frac{(2z)^2}{1.2}f^2(0) + \ldots + \frac{(2z)^{2n}}{2n!}f^{2n}(0) + \ldots].$$

---

[1]) Streng genommen müssten wir bei den später folgenden Functionen ebenfalls die Convergenzbedingungen angeben. Da jedoch diese Functionen für gewisse Werthe der Veränderlichen durch unendliche Reihen sich darstellen lassen, diese Werthe aber zur Herleitung der Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen genügen, so wird man uns die Angabe der jedesmaligen Convergenzgrenzen erlassen. Uebrigens kann man ja leicht nach Cauchy's bekanntem Satze beurtheilen, innerhalb welcher Grenzen die Functionen durch unendliche Reihen (mit aufsteigenden Potenzen von z) darstellbar sind.

Der oben erwähnten Eigenschaft zufolge, dass in der Entwicklung von fz alle Glieder von der Form $\frac{z^{2n-1}}{2n+1!} f^{2n+1}(0)$ für $n > 0 =$ Null sind, erhalten wir daher aus den mit dem Factor z^{2n+1} behafteten Gliedern der Gleichung 5 die neue

$$\frac{2^{2n-1}}{2n!} f^{2n}(0) + \frac{2^{2n-3}}{2n-2!} . f^{2n-2}(0) . \frac{1}{3!} + \frac{2^{2n-5}}{2n-4!} f^{2n-4}(0) . \frac{1}{5!} \quad 6.$$

$$+ \ldots + \frac{2}{2n-1!} f^{2}(0) . \frac{1}{1.2} - \frac{n}{2n+1!} = 0.$$

Setzt man nun in den Formeln 4. und 6. n als ungerade voraus, so erkennt man, dass das letzte Glied in beiden Gleichungen übereinstimmt. Und da überdies beide Gleichungen einen ähnlichen Bau besitzen, so gewinnen wir ohne Mühe die Beziehungen:

$$f^{2n}(0) = B_n, \quad f^{2n-2}(0) = -B_{n-1},$$
$$f^{2n-4}(0) = B_{n-2}, \quad f^{2n-6}(0) = -B_{n-3},$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{2}(0) = B_1,$$

d. h. die Bernoulli'schen Zahlen von ungeradem Range führen das Plus-, die von gerader Rangstelle dagegen das Minuszeichen. Da nun $r-1$ eine gerade oder ungerade Zahl ausdrückt, je nachdem r ungerade oder gerade ist, so wird allgemein

$$\text{II.} \quad f^{2r}(0) = (-1)^{r-1} . Br$$

sein.

Anmerkung.

Obgleich die zu 6. führenden Betrachtungen scheinbar ganz anderer Natur sind, als die zur Erzeugung der Gleichung 4. befolgten Entwicklungen: so stammen doch beide — wenn man will — aus gemeinsamer Quelle. Und zwar scheint uns dies darin zu liegen, dass beide Methoden dem gleichen Ziele, der Bestimmung von A_n oder nA_n zustreben. Da nämlich die Darstellung von nA_n durch eine Summe als Zweck der Untersuchungen nach unserm Dafürhalten angesehen werden darf, so erhellt zunächst, dass zur Ermittelung der Gleichung 4. statt $\frac{\sin z}{z}$ auch $\frac{e^z - e^{-z}}{2z}$ hätte gewählt werden können. Und ebenso würde man ferner — wie sich sofort ergiebt — aus der Form $\frac{2z}{e^z - e^{-z}}$ dasselbe Resultat erzielen. Nimmt man aber diese Function, dann kommt augenblicklich

$$fz = \frac{e^z + 1}{2} f2z,$$

die Gleichung also, welche A_n formell in sich begreift. Die Glieder aber, welche nA_n annulliren, können, wie wir sahen, nur die entsprechenden in 4. sein.

Das Unterscheidende beider Methoden dürfte hiernach nur in Folgendem bestehen. Während die eine der Methoden ihr Ziel dadurch zu erreichen sucht, dass sie die Function $\frac{e^z - e^{-z}}{2z}$ durch Gleichgeltendes, durch

$$e^{\log(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\ldots)} = e^{\log(1+\frac{z^2}{\pi^2})+\log(1+\frac{z^2}{2^2\pi^2})+\ldots}$$

$$= 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \text{etc. etc.}$$

ersetzt, darauf z in $z+u$ umwandelt und schliesslich die mit u multiplicirten Glieder zusammenstellt; geht die andere Behandlungsweise darauf aus, eine solche Form aus der ursprünglichen Function $\frac{e^z - e^{-z}}{2z}$ zu erzielen, die bei gehöriger Behandlung sogleich zu erkennen giebt, dass ein Glied mit dem Nenner $2n+1!$ nicht vorkommen kann.

§. 3.

Recurrirende Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen.

Mit Hülfe der Beziehung II. wird es nun leicht sein, Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen aufzusuchen. Vereinigen wir zu dem Behufe die mit z^{2n} multiplicirten Glieder der Gleichung 5, so entspringt

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!} f^{2n}(0) + \frac{2^{2n-3}}{2n-2!} \frac{f^{2n-2}(0)}{1.2} + \frac{2^{2n-5}}{2n-4!} \frac{f^{2n-4}(0)}{4!} + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{2^5}{6!} \frac{f^6(0)}{2n-6!} + \frac{2^3}{4!} \frac{f^4(0)}{2n-4!} + \frac{2}{1.2} \frac{f^2(0)}{2n-2!}$$
$$+ \frac{1-2n}{2.1\ldots 2n} = 0.$$

Berücksichtigt man aber Gleichung II. und dividirt auf beiden Seiten mit $(-1)^{n-1}$, so ergiebt sich aus vorstehender Beziehung

$$7.\quad \frac{2^{2n}-1}{2n!} B_n - \frac{2^{2n-3}}{2n-2!} \frac{B_{n-1}}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{n-\frac{1}{2}}{1.2\ldots 2n} = 0.$$

Verbindet man die Gleichungen 4. und 7. durch Addition, so folgt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2^{2n-1}-1}{2n!}B_n + 2\,.\,\frac{2^{2n-1}}{2n!}\,\frac{B_n}{1} - 4\,\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}\,\frac{B_{n-1}}{3!} + \ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1}.\,2n\,\frac{2}{1.2}\,\frac{B_1}{2n-1!} = (-1)^{n+1}\,\frac{2n\,(2n+1)-1}{2\,.\,2n+1!} \\ &\text{oder} \\ &\frac{3.2^{2n-1}-1}{1\ldots\ldots 2n}B_n - 4\,.\,\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}\,\frac{B_{n-1}}{1.2.3} + 6\,.\,\frac{2^{2n-5}}{2n-4!}\,\frac{B_{n-2}}{1\ldots .5} - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1}.\,2n\,.\,\frac{2}{1.2}\,\frac{B_1}{1\ldots 2n-1} + (-1)^n\,\frac{2n^2+n-\frac{1}{2}}{1\ldots .\,2n+1} = 0.\end{aligned}\right\}8.$$

Wird hingegen die Gleichung 4. von der Gleichung 7. abgezogen, so kommt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2^{2n-1}-1}{2n!}B_n - 2\,.\,\frac{2^{2n-3}}{2n-2!}\,\frac{B_{n-1}}{3!} + 4\,.\,\frac{2^{2n-5}}{2n-4!}\,\frac{B_{n-2}}{5!} - \ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1}.\,2\,(n-1)\,\frac{2}{1.2}\,\frac{B_1}{2n-1!} = (-1)^{n+1}\,\frac{2n^2-n-\frac{1}{2}}{2n+1!} \\ &\quad = (-1)^{n+1}\,\frac{2n\,(2n-1)-1}{2.\,1\ldots .\,2n+1}.\end{aligned}\right\}9.$$

Setzt man ferner $-z$ statt z in den Ausdruck

$$fz = \frac{z}{e^z - 1},$$

so erhält man

$$f(-z) = e^z\,.\,fz.$$

Und diese Werthe, nach den steigenden Potenzen von z entwickelt, geben die Beziehung

$$\left.\begin{aligned}&1 + \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2}f^2(0) + \frac{z^4}{1\ldots 4}f^4(0) + \ldots . + \frac{z^{2n}}{1\ldots .2n}f^{2n}(0) + \ldots\ldots \\ &\quad = [1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^{2n}}{1\ldots 2n} + ..] \\ &\qquad [1 - \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2}f^2(0) + \ldots . + \frac{z^{2n}}{1\ldots 2n}f^{2n}(0) + \ldots].\end{aligned}\right\}10$$

Stellt man jetzt alle Glieder zusammen, welche mit z^{2n} multiplicirt sind, so findet die Gleichung Statt

$$\begin{aligned}&B_{n-1} - \frac{2n-2\,.\,2n-3}{3.4}B_{n-2} + \frac{2n-2\ldots .2n-5}{3.4.5.6}B_{n-3} - \ldots\ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{2n-2\,.\,2n-3}{3.4}B_2 - (-1)^{n-1}.\,B_1 + (-1)^{n-1}.\,\frac{2\,(n-1)}{2n.\,2n-1} = 0.\end{aligned}$$

Hieraus aber folgt durch Vertauschung von n mit $n+1$

$$\left.\begin{aligned}&B_n - \frac{2n\,.\,2n-1}{3.4}B_{n-1} + \frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2\,.\,2n-3}{3.4.5.6}B_{n-2} - \ldots\ldots \\ &+ (-1)^n\,.\,\frac{2n.\,2n-1}{3.4}B_2 - (-1)^n\,.\,B_1 + (-1)^n\,.\,\frac{2n}{2n+1.\,2n+2} = 0.\end{aligned}\right\}11.$$

Direct würde man zu dieser Gleichung gelangt sein, hätte man gleich die mit z^{2n+2} behafteten Glieder zusammengestellt, wodurch freilich die Uebereinstimmung mit dem früheren Gedankengange (formell) aufgehoben wäre.

Eine andere Relation fliesst aus 10, sofern die den Factor z^{2n+1} enthaltenden Glieder vereinigt werden. Man gewinnt dann die Beziehung

$$12. \quad \frac{B_n}{2n!} - \frac{1}{2n-2!} \cdot \frac{1}{3!} B_{n-1} + \frac{1}{2n-4!} \cdot \frac{1}{5!} B_{n-2} - \ldots\ldots - (-1)^{n-1} \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2n-3!} B_2 + (-1)^{n-1} \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{2n-1!} B_1 + (-1)^n \frac{2n-1}{1.2.\,2n+1!} = 0,$$

eine Relation, welche Hr. Prof. Grunert in den Supplementen zu Klügel's math. Wtrb. seinen Betrachtungen über Bernoulli'sche Zahlen zu Grunde legt. Dieser Gleichung können wir eine andere Form geben, indem wir dieselbe mit $2n+1!$ multipliciren; wir erhalten so

$$12^a \quad (2n+1) B_n - \frac{2n+1..2n-1}{1.2.3} B_{n-1} + \frac{2n+1...2n-3}{1.2.3.4.5} B_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2n+1.2n}{1.2} B_1 + (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{1.2} = 0.$$

Aus dieser nach Moivre benannten Formel [1]) und der Gleichung $(2n+1) f^{2n}(0) + \ldots - \frac{2n-1}{1.2} = 0$

leitet Hr. Prof. Stern zuerst die in II. aufgestellte Beziehung ab [2]). Später beweist dann Stern dieselbe Gleichung auf dem von uns angenommenen Wege [3]).

Ersetzt man in der Gleichung $fz = \frac{e^z+1}{2} f2z$ die Function fz durch $e^{-z}.f(-z)$ und entwickelt nun die verschiedenen Functionen von z in Reihen, so erhält man zwei neue Relationen, nämlich

$$13. \quad \frac{(2^{2n}-1) B_n}{2n!} - \frac{2^{2n-3}+1}{2n-2!} \frac{B_{n-1}}{1.2} + \frac{2^{2n-5}+1}{2n-4!} \frac{B_{n-2}}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{4n-3}{2.2n!} = 0$$

---

[1]) Nach Klügel (Math. Wörtrb. Thl. 3. S. 872) soll der Italiener Canterzani im Jahre 1804 diese Formel, die er indirect gefunden, als eine neue und bequemere im Vergleich zu der Euler'schen Relation in „Memorie della società ital." mitgetheilt haben. Klügel hatte jedoch erwähnte Formel schon 1803 in Anwendung gebracht (Art. Bern. Zahlen. Bd. I. S. 254 im math. Wtrb.).

[2]) „Zur Theorie der Euler'schen Integrale." S. 7.

[3]) Ebendaselbst. Seite 34.

als Coefficienten von z^{2n} und

$$\frac{2^{2n-1}+1}{2n\,!} Bn - \frac{2^{2n-3}+1}{2n-2\,!}\,\frac{B_{n-1}}{1.\,2.\,3} + \frac{2^{2n-5}+1}{2n-4\,!}\,\frac{B_{n-2}}{5\,!} - \dots \quad + (-1)^n \cdot \frac{2n-\frac{1}{2}}{2n+1\,!} = 0 \qquad 14.$$

aus den Factoren von z^{2n+1}.

Ein Blick auf beide Relationen zeigt jedoch, dass sie respective aus den Formeln 7. und 11. und 4. und 12. gleichfalls resultiren.

Unterwirft man ferner die Gleichung

$$e^{-z} fz = \frac{e^{-z}+1}{2} f2z$$

einer ähnlichen Behandlung, so entspringen aus den Gliedern mit z^{2n} und z^{2n+1} die beiden Beziehungen:

$$(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}(2^{2n-3}-1)B_{n-1} + \frac{2n\dots2n-3}{1.2.3.4}(2^{2n-5}-1)B_{n-2} \quad - \dots + (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \qquad 15.$$

und

$$(2^{2n-1}-1)B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2.3}(2^{2n-3}-1)B_{n-1} + \frac{2n\dots2n-3}{1.2.3.4.5}(2^{2n-5}-1)B_{n-2} \quad - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2.\,2n+1} = 0. \qquad 16.$$

Auch diese Ausdrücke ergeben sich aus den vorhingenannten Gleichungen [1].

Zwei andere Relationen, die aus den Gleichungen 7. und 11. auf dem Wege der Addition oder Subtraction entspringen, sind

$$2\,(2^{2n}-1)\,B_n - \frac{2n\,.\,2n-1}{1.2}(2^{2n-2}-1)\,B_{n-1} \dots + (-1)^n \,.\, n = 0 \qquad 17.$$

und

$$2\,(2^{2n}-1)\,B_n - \frac{2n.\,2n-1}{1.2}(2^{2n-2}+1)\,B_{n-1} \dots + (-1)^n\,(3n-2) = 0. \qquad 18.$$

Durch Vertauschung von z in $2z$ geht die früher betrachtete Gleichung

$$f(-z) = e^z f z$$

über in

$$(e^z+1)\,f(-2z) = 2e^{2z} fz.$$

---

[1]) Dass man die Formeln 13. und 14. auch aus den Entwicklungen der Gleichung

$$e^z fz = \frac{e^{-z}+1}{2} f(-2z)$$

und die Relationen 15. und 16. aus den entsprechenden Reihen der vier Functionen von z in

$$e^z f(-z) = \frac{e^z+1}{2} f(-2z)$$

wird erzielen können, ergiebt sich sofort. Eine ähnliche Bemerkung ist natürlich auch auf die übrigen Gleichungen auszudehnen.

Aus dieser Gleichung aber folgert man die neue:

$$[2+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+..+\frac{z^{2n}}{2n!}+\ldots][1+z+\frac{(2z)^2}{1.2}f^2(0)+\ldots+\frac{(2z)^{2n}}{1\ldots 2n}f^{2n}(0)+..]$$

$$= 2\,[1+\frac{2z}{1}+\frac{(2z)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(2z)^{2n}}{2n!}+..]$$

$$[1-\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2}f^2(0)+..+\frac{z^{2n}}{1\ldots 2n}f^{2n}(0)+..].$$

Je nachdem man nun die Coefficienten von z^{2n} oder z^{2n+1} dieser Gleichung zusammenstellt, wird man mit Berücksichtigung der in II. aufgestellten Beziehung die Relationen erhalten:

19.
$$(2^{2n}-1)B_n-\frac{2n.2n-1}{1.2}2^2(2^{2n-5}-1)B_{n-1}$$
$$+\frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}2^4(2^{2n-9}-1)B_{n-2}$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-2}(2^{3-2n}-1)B_1$$
$$=(-1)^n\left\{2^{2n-1}(n-2)+n+\tfrac{1}{2}\right\}$$

und

20.
$$2(2^{2n-2}-1)B_n-\frac{2n.2n-1}{1..3}2^3(2^{2n-6}-1)B_{n-1}$$
$$+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4.5}2^5(2^{2n-10}-1)B_{n-2}\ldots.$$
$$=(-1)^n\left\{\frac{1}{2n+1}[\tfrac{1}{2}-2^{2n+1}]+\tfrac{1}{2}[1+2^{2n}]\right\}.$$

Geht man ferner von der Gleichung

$$(e^{2z}+1)fz=\frac{e^z+1}{2}(f2z+f(-2z))$$

aus, so führen die Coefficienten von z^{2n} zu der Formel

21
$$\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n-2.\frac{2^{2n-4}-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{1.2}+2^3\frac{2^{2n-8}-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{4!}-\ldots$$
$$+\text{etc.}=(-1)^n.\frac{2^{2n-1}(n-2)+1}{2.1.2.3\ldots 2n}.$$

Die Coefficienten von z^{2n+1} hingegen liefern die Relation

22.
$$\frac{2^{2n-1}-1}{2n!}B_n-2^2\frac{2^{2n-5}-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{3!}+2^4\frac{2^{2n-9}-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{5!}-\ldots$$
$$+\text{etc.}=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}(3-2n)-1}{1.2.1.2\ldots\ldots 2n+1}.$$

Auf ähnliche Weise entspringt aus den Factoren von z^{2n+2} (oder z^{2n}, sofern nach vollzogener Operation n in $n+1$ umgesetzt wird) der Gleichung

$$(e^{2z}-1)fz=\frac{e^z+1}{2}(f(-2z)-f2z)$$

die Beziehung

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B_n}{2n!} - 2^2\frac{B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3.4} + 2^4\frac{B_{n-2}}{2n-4!}\frac{1}{3.4.5.6} - \ldots\ldots \\ \quad = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(n-1)+n+1}{1.2.3.4\ldots.2n+2} \\ \text{oder auch} \\ B_n - 2^2\frac{2n.2n-1}{3.4}B_{n-1} + 2^4\frac{2n\ldots 2n-3}{3.4.5.6}B_{n-2} - \ldots\ldots \\ \quad = (-1)^{n+1}.\frac{n+1+2^{2n}(n-1)}{2n+1\,.\,2n+2}.\end{array}\right\} 23.$$

Und die Coefficienten von z^{2n+1} geben

$$\begin{array}{l}B_n - 2^2\frac{2n.2n-1}{1.2.3}B_{n-1} + 2^4\frac{2n\ldots 2n-3}{1.2.3.4.5}B_{n-2} - \ldots\ldots \\ \quad = (-1)^{n+1}.\left(2^{2n-2} - \frac{2^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{2}\right).\end{array} \qquad 24.$$

Schon bei einer nur oberflächlichen Betrachtung erkennt man, dass Gleichung 21. durch Addition der Gleichungen 7. und 19. und die Relation 23. durch Subtraction der genannten Gleichungen entsteht. Ebenso sagt die Formel 24. offenbar mit andern Worten, dass sie auf dem Wege der Subtraction aus den Relationen 4. und 20. sich ergiebt.

Addirt man ferner zu Gleichung 23. Gleichung 11, so folgt

$$\begin{array}{l}B_n - (2^2+1)\frac{2n.2n-1}{2.3.4}B_{n-1} + (2^4+1)\frac{2n\ldots 2n-3}{2\ldots.6}B_{n-2} - \ldots. \\ \ldots = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{n+2^{2n}(n-1)}{2n+1\,.\,2n+2}\right).\end{array} \qquad 25$$

Andererseits gewinnen wir durch Subtraction beider Gleichungen und nachherige Vertauschung von n mit $n+1$.

$$\begin{array}{l}(2^2-1)B_n - (2^4-1)\frac{2n.2n-1}{5.6}B_{n-1} + (2^6-1)\frac{2n\ldots 2n-3}{5.6.7.8}B_{n-2} - \ldots. \\ \ldots = (-1)^{n+1}.\frac{3.4.n(2^{2n+2}-1)}{2n+1.2n+2.2n+3.2n+4}.\end{array} \qquad 26.$$

Eine ähnliche Relation fliesst aus den Factoren von z^{2n+1} der Gleichung

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2}f(-z) = \frac{e^{2z}-1}{2}fz,$$

nämlich

$$\begin{array}{l}\frac{2^2-1}{2n!}\frac{B_n}{2.3} - \frac{2^4-1}{2n-2!}\frac{B_{n-1}}{2..5} + \frac{2^6-1}{2n-4!}\frac{B_{n-2}}{2\ldots 7} - \ldots\ldots\ldots \\ \quad = (-1)^{n+1}\frac{1+2^{2n}(2n-1)}{2.3.4\ldots.2n+3}.\end{array} \qquad 27.$$

Die Zusammenstellung der mit z^{2n} multiplicirten Glieder würde wieder zu der Formel 23. führen.

Behandelt man die aus der analytischen Trigonometrie bekannten Entwicklungen von $\cos z$ auf dieselbe Weise wie $\frac{\sin z}{z}$, so kommt man, wie Hr. Prof. Stern gezeigt hat [1]), zu der Relation

$$\begin{aligned} &2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n - \frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}\,2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)B_{n-1} \\ 28.\quad &+ \frac{2n\ldots.\,2n-3}{1.\,2.\,3.\,4}\,2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)B_{n-2} - \ldots\ldots \\ &+(-1)^{n-1}\frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}\,2\,(2^2-1)B_1 + (-1)^n.\,n = 0. \end{aligned}$$

Nach der von uns befolgten Methode dürfte die Rechnung so stehen. Da bekanntermassen die Entwicklungen von $\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ bis auf die Vorzeichen der einzelnen Glieder mit den entsprechenden Entwicklungen von $\cos z$ übereinstimmen, so wird auch hier unser Augenmerk darauf gerichtet sein, aus $\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \mathfrak{Cos}.z$ eine solche Form zu erzielen, die als nothwendige Folge Gleichung 28. in sich schliesst. Nun aber führt

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z}+1}{2}\,.\;e^{-z}$$

auf die Gleichung

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = e^{-z}\,\frac{f2z}{f4z},$$

d. h. auf

$$\frac{e^{-z}}{2}f2z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,f4z;$$

mithin wird nach dem Taylor'schen Satze

$$\left[\tfrac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2.1.2} - \frac{z^3}{2.3!} + \ldots - \frac{z^{2n-1}}{2.\,2n-1\,!} + \frac{z^{2n}}{2.\,2n\,!} + \ldots\right]$$
$$\left[1 - z + \frac{2^2 z^2}{1.2}f^2(0) + \ldots + \frac{2^{2n}z^{2n}}{2n\,!}f^{2n}(0) + \ldots\right]$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} + \frac{z^2}{2.\,1.\,2} + \frac{z^4}{2.\,4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{2.\,2n\,!} + \ldots\right]$$
$$\left[1 - 2z + \frac{2^2(2z)^2}{1.2}f^2(0) + \ldots + \frac{2^{2n}(2z)^{2n}}{2n\,!}f^{2n}(0) + \ldots\right].$$

---

[1]) Crelle, Journal. Bd. 26. S. 88 ff.

Hieraus aber folgt durch Verbindung der Coefficienten von z^{2n} die Relation

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n!} f^{2n}(0) + \frac{2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)}{2n-2!} \frac{f^{2n-2}(0)}{1.2}$$
$$+ \frac{2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)}{2n-4!} \frac{f^{2n-4}(0)}{1\ldots4} + \ldots + \frac{2}{1.2} \frac{(2^2-1)}{2n-2!} f^2(0) - \frac{1}{2.\,2n-1!} = 0,$$

d. g. mit Rücksicht auf Gleichung II. und durch Multiplication mit $2n!$ die Beziehung 28.

Dem Früheren analog könnte man jetzt die Coefficienten von z^{2n+1} zusammenstellen. Wir unterlassen jedoch diese Operation, weil sie wieder auf Gleichung 4. zurückführt.

Substituirt man in der Gleichung

$$fz = \frac{e^z + 1}{2} f2z$$

für e^z den Werth $\frac{z + fz}{fz}$, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction die von Stern angeführte Gleichung

$$zf2z = 2(fz)^2 - 2fz \,.\, f2z \text{ [1]}.$$

Und hieraus folgert man nach geschehener Entwicklung der Functionen in Reihen durch Vereinigung der mit z^{2n} behafteten Glieder die Relation

$$\begin{aligned}(2^{2n}-1)B_n = {} & \frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}(2^{2n-2}-1)B_{n-1}\,.\,B_1 \\ & + \frac{2n\ldots 2n-3}{1.2.3.4}(2^{2n-4}-1)B_{n-2}B_2 - \\ & + \ldots + \frac{2n.\,2n-1}{1.2}(2^2-1)B_1 B_{n-1}.\end{aligned} \qquad 29.$$

Auch hier giebt die Zusammenstellung der Coefficienten von z^{2n+1} nichts Neues.

Was die von Euler §. 123. seiner Differentialrechnung gegebene Relation betrifft, so erkennt man leicht, dass sie nach der hier befolgten Methode aus verschiedenen Gleichungen abgeleitet werden kann. Wir wollen die Gleichung

$$fz = 1 - \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2} f^2(0) + \ldots + \frac{z^{2n}}{1\ldots 2n} f^{2n}(0) + \ldots$$

wählen. Unterwerfen wir diese der Differentiation, so entspringt

$$-\frac{1}{1.2} + \frac{2z}{1.2} f^2(0) + \frac{4z^3}{1..4} f^4(0) + \ldots + 2n\frac{z^{2n-1}}{2n!} f^{2n}(0) + \ldots$$
$$= \frac{1}{z} fz - \tfrac{1}{2} f(-z) fz,$$

[1]) „Zur Theorie der Euler'schen Integrale." S. 35.

Und werden jetzt die Glieder mit z^{2n-1} verbunden, so folgt weiter

$$(2n+1)f^{2n}(0) = -\left[\frac{2n.2n-1}{1.2}f^{2n-2}(0)f^{2}(0) + \frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}f^{2n-4}(0).f^{4}(0)\right.$$

30.

$$+\ldots+\frac{2n.2n-1\ldots .5}{1\ldots .. 2n-4}f^{4}(0)f^{2n-4}(0)$$

$$\left.+\frac{2n\ldots . 3}{1\ldots . 2n-2}f^{2}(0)f^{2n-2}(0)\right].$$

Dies aber ist die verallgemeinerte Euler'sche Relation. Setzt man $n=1$, so wird die vorstehende Formel nicht anwendbar sein, weil sie das für diesen Fall Statt findende Glied $-\frac{1}{z}\cdot\frac{-z^2}{(1.2)^2} = \frac{3z}{1.2}f^2(0)$ nicht in sich begreift. Alsdann nämlich hat man diese Gleichung

$$\frac{2z}{1.2}f^2(o) = \frac{z}{1.2}f^2(o) - \frac{1}{z}\left[\frac{z^2}{1.2}f^2(0) - \frac{z^2}{(1.2)^2} + \frac{z^2}{1.2}f^2(o)\right],$$

$$\frac{2+1}{1.2.}f^2(0) = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2},$$

d. h. $\quad 3B_1 = \frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}.$

Um endlich die von Drobisch in seinen „Observationes analyticae, observ. II." mitgetheilte Formel zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung $\frac{1}{e^z-1} = \frac{fz}{z}$.

Dadurch gewinnen wir

$$-\frac{1}{e^z-1}\cdot\frac{f-z}{z} = \frac{d}{dz}\cdot\frac{fz}{z} = Dfz,$$

d. h.

$$-\left[\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots\right]\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{f^2(0)}{1.2}+\ldots+2n-1.\frac{z^{2n-2}}{2n!}f^{2n}(0)+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{1.2}+\frac{z}{1.2}f^2(0)+\ldots . .+\frac{z^{2n-1}}{1\ldots . .2n}f^{2n}(0)+\ldots\ldots$$

Werden nun die Glieder mit z^{2n} vereinigt, so kommt schliesslich

$$B_n = \frac{1}{2n-1}\left[\frac{2n.2n-1}{3.4}(2n-3)B_{n-1} - \frac{2n\ldots 2n-3}{3.4.5.6}(2n-5)B_{n-2}\right.$$

31.

$$\left.+\ldots+(-1)^n B_1 + (-1)^{n+1}\frac{1.2}{2n+1.\ 2n+2}\right],$$

welches die von Drobisch gegebene Relation ist.

Eine ähnliche Relation erhalten wir noch aus der angewendeten Gleichung durch Zusammenstellung der mit z^{2n-1} multiplicirten Glieder, nämlich

$$B_n = \frac{1}{2n.2n+1}\left[\frac{2n+1.2n.2n-1}{1.2.3}(2n-3)B_{n-1} - \frac{2n+1\ldots.2n-3}{1.2.3.4.5}(2n-5)B_{n-2} + \ldots + (-1)^n.\frac{2n+1.2n}{1.2}B_1 + (-1)^{n+1}.1\right] \quad 32.$$

Wenn nun gleich — wie bei einiger Ueberlegung sofort erhellt — noch so manche Formen erzeugt werden könnten, so wollen wir doch unsere Betrachtungen hier abbrechen, zumal es doch von keinem grossen Belang sein dürfte, zu den in manchen Fällen nicht gerade durch grosse Einfachheit sich auszeichnenden Relationen neue hinzuzufügen. Und dann glauben wir, schon durch die vorliegenden Entwicklungen den Vorzug der Stern'schen Methode mehr noch dargethan zu haben, als der Urheber, der — wie gesagt — nur gelegentlich dieser Idee in der oft erwähnten Abhandlung gedenkt. Wir wollen daher jetzt andern Untersuchungen uns zuwenden, vorher aber noch bemerken, dass die Relationen 17, 18, 23, 24. ebenfalls von Stern gefunden wurden. Gleichung 7. dagegen hat schon Hr. Göpel im 3. Bande S. 66 des Grunert'schen Archivs als Supplementarformel zu der von Grunert entwickelten Relation 4. angegeben. Auch ist zu erwähnen, dass Hr. Prof. Schlömilch die Formeln 11, 12, 15, 16, 28. mit Hülfe bestimmter Integrale abgeleitet hat [1]). Wie leicht erhellt, kann man die angeführten Gleichungen auch in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2n+1}{1}B_n - \frac{2n+1..2n-1}{1.2.3.\ 2}B_{n-1} + \frac{2n+1\ldots2n-3}{1.2.3.4.5.\ 3}B_{n-2} - \ldots\ldots\ldots \\ &+ (-1)^n\frac{2n+1.2n.2n-1}{2.3.2}B_2 - (-1)^n\frac{2n+1}{1}B_1 = (-1)^{n+1}\frac{2n}{2(n+1)}, \\ &\text{d. h.} \\ &\frac{2n+1}{1}B_1 - \tfrac{1}{2}\frac{2n+1..2n-1}{1.2.3}B_2 + \tfrac{1}{3}\frac{2n+1\ldots2n-3}{1.2.3.4.5}B_3 - \ldots\ldots \\ &+ (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.\frac{2n+1.2n\ldots4.3}{1.2.3\ldots\ldots2n-1}B_n = \frac{n}{n+1}; \end{aligned}\right\} 11^a$$

$$B_n - \frac{2n.2n-1}{1.2.3}B_{n-1} + \ldots + (-1)^n\frac{2n\ldots2n-2}{1.2.3.4}B_2 - (-1)^n.\frac{2n}{1.2}B_1 = (-1)^{n+1}\frac{2n-1}{1.2.2n+1}, \quad 12^b$$

1) Grunert, Archiv. Thl. 3. Abhandl. IV. S. 14 ff.

oder durch Multiplication mit 2:

$$\frac{2n}{1}B_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2n\ldots 2n-2}{1.2.3}B_2 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2n\ldots 2n-4}{1.2.3.4.5}B_3 - \ldots\ldots$$
$$-(-1)^{n+1}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2n\ldots.4}{1.2\ldots 2n-3}B_{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{2n\ldots 2}{2n-1!}B_n = \frac{2n-1}{2n+1};$$

$$\frac{2n-1!}{2n-1!}\cdot\frac{2}{2n}(2^{2n}-1)f^{2n}(0) + \frac{2n-1\ldots 3}{1\ldots 2n-3}\frac{2.1}{1.2}\frac{2(2^{2n-2}-1)}{2(n-1)}f^{2n-2}(0)$$
$$+\ldots. + \frac{2n-1}{1}(2-1)f^2(0) = \frac{1}{2n},$$

d. g. durch Vertauschung von n mit $n+1$:

$$15^a \quad (2-1)\frac{2n+1}{1}B_1 - \frac{2^3-1}{2}\cdot\frac{2n+1..2n-1}{1.2.3}B_2 + \frac{2^5-1}{3}\frac{2n+1..2n-3}{5!}B_3 - ..$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}\cdot\frac{2n+1\ldots 3}{1\ldots 2n-1}B_n$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\tfrac{1}{2} + (-1)^{n+1}(2^{2n+2}-1)B_{n+1}\right];$$

$$16^a \quad (2-1)\frac{2n}{1}B_1 - \frac{2^3-1}{2}\cdot\frac{2n..2n-2}{1.2.3}B_2 + \frac{2^5-1}{3}\frac{2n\ldots 2n-4}{1.2.3.4.5}B_3 - \ldots.$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}\frac{2n.2n-1\ldots.2}{1.2\ldots..2n-1}B_n = \frac{1}{2n+1};$$

$$28^a \quad \frac{2^2(2^2-1)}{2}\frac{2n-1}{1}f^2(0) + \frac{2^4(2^4-1)}{4}\frac{2n-1\ldots 2n-3}{1.2.3}f^4(0)$$
$$+\frac{2^6(2^6-1)}{6}\frac{2n-1\ldots 2n-5}{1.2.3.4.5}f^6(0)$$
$$+..+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}\frac{2n-1\ldots 1}{1\ldots 2n-1}f^{2n}(0) = 1.$$

Dies aber sind die Formen, unter denen Schlömilch die früheren Gleichungen darstellt.

§. 4.

Independente Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen.

Ein Blick auf die im Vorhergehenden entwickelten Relationen zeigt, dass durch sie die Mittel zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen geboten sind. Immer aber setzt bei dieser Bestimmung die folgende Bernoulli'sche Zahl die Kenntniss der vorhergehenden voraus. Dass eine derartige Berechnung unter Umständen aber ihr Unangenehmes haben kann, leuchtet leicht ein. Alsdann wird es offenbar wünschenswerth, Ausdrücke zu besitzen, welche irgend eine der Bernoulli'schen Zahlen unabhängig von jeder andern darstellen. Abgesehen jedoch von diesem mehr secundären Grunde, kann man bei analytischen Be-

trachtungen mit Recht verlangen, dass — wenn anders die Forderung erfüllbar ist — die Bestimmung von Grössen nicht bloss recurrirend, sondern auch auf independentem Wege geschehe. Sind nun aber, fragen wir daher, solche independenten Ausdrücke hier möglich? Wir müssen diese Frage bejahend beantworten, weil wir den Begriff der n^{ten} Bernoulli'schen Zahl auf die in §. 1. angegebene Gleichung I. gründeten. Und dann haben wir ferner die Existenz eines zweiten derartigen Ausdruckes, wenn auch in unentwickelter Form, durch die Gleichung II. §. 2. nachgewiesen. Dieser Gleichung zufolge war also

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} B_n;$$

dem Begriffe nach aber ist $f^{2n}(0)$ gleichbedeutend mit

$$\left[\frac{d^{2n} fz}{dz^{2n}}\right]_0 = \left[D^{2n} fz\right]_0,$$

wo die angehängte Null ausdrückt, dass man nach der Differentiation $z=0$ zu setzen hat. Wir werden mithin $f^{2n}(0)$ in entwickelter Form erhalten, wenn wir die Function fz einer $2n$maligen Differentiation unterwerfen. Wird die desfallsige Operation ausgeführt, so wird man — wie sogleich erhellt — sämmtliche Functionalwerthe unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ bekommen. Diesem Uebelstande vorzubeugen, schlagen wir folgenden von Laplace herrührenden Weg ein [1]).

Da nämlich die Beziehung gilt:

$$fz = \frac{z}{(e^{\frac{1}{2}z}+1)(e^{\frac{1}{2}z}-1)} = \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1},$$

so ist offenbar

$$D^{2n} fz = D^{2n} \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - D^{2n} \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}.$$

Und weil ferner für $z=0$

$$D^{2n}_{\frac{1}{2}z} \cdot \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}\pm 1} = D^{2n} \frac{z}{e^z \pm 1}$$

ist, so entspringt weiter

$$\frac{1}{2^{2n}}\left[D^{2n}\frac{z}{e^z-1}\right]_0 - \frac{1}{2^{2n}}\left[D^{2n}\frac{z}{e^z+1}\right]_0 = \left[D^{2n}\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1}\right]_0 - \left[D^{2n}\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}\right]_0,$$

d. g.

$$\left[D^{2n}\frac{z}{e^z-1}\right]_0 = -\frac{1}{2^{2n}-1}\left[D^{2n}\frac{z}{e^z+1}\right]_0.$$

---

1) Lacroix, Traité. T. III. p. 107 sqq.

Bestimmt man jetzt $D^{2n}\frac{z}{e^z-1}$ nach der für die Differentiation eines Productes geltenden Regel, so folgt

$$\left[D^{2n}\frac{z}{e^z-1}\right]_0 = -\frac{2n}{2^{2n}-1}\left[D^{2n-1}(e^z+1)^{-1}\right]_0,$$

da offenbar

$$D^2 z = \ldots = D^{2n-1}z = D^{2n}z = 0$$

ist, und in der Gleichung

$$D^{2n}z\,(e^z+1)^{-1} = z\,D^{2n}(e^z+1)^{-1} + \frac{2n}{1}D^{2n-1}(e^z+1)^{-1}$$

das erste Glied der rechten Seite für $z=0$ verschwindet. Nun ist

$$D\frac{1}{e^z+1} = \frac{-e^z}{(e^z+1)^2},\quad D^2(e^z+1)^{-1} = \frac{e^{2z}-e^z}{(e^z+1)^3},$$

$$D^3\frac{1}{e^z+1} = \frac{-e^{3z}+4e^{2z}-e^z}{(e^z+1)^4};$$

also, wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ constante Coefficienten bedeuten, allgemein

$$D^r\frac{1}{e^z+1} = \frac{A_1 e^{rz} + A_2 e^{(r-1)z} + A_3 e^{(r-2)z} + \ldots + A_r e^z}{(e^z+1)^{r+1}},$$

ein Resultat, das man mit der grössten Leichtigkeit durch vollständige Induction zur Gewissheit erheben kann. Um die Coefficienten $A_1\ A_2\ldots$ zu bestimmen, bedenken wir, dass

$$(e^z+1)^{-1} = e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z} - \ldots\ldots\ldots,$$

folglich, wenn wir für r $2n-1$ schreiben,

$$D^{2n-1}\frac{1}{e^z+1} = [e^{-z} - 2^{2n-1}e^{-2z} + 3^{2n-1}e^{-3z} - \text{etc.}](-1)^{2n-1}.$$

Wird jetzt auf beiden Seiten mit $(e^z+1)^{2n}$ multiplicirt, so kommt

$$(e^z+1)^{2n}D^{2n-1}\frac{1}{e^z+1} = -\left[e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \ldots\right]$$

$$\left[e^{-z} - 2^{2n-1}e^{-2z} + \ldots\right]$$

$$= A_1 e^{(2n-1)z} + A_2 e^{(2n-2)z} + A_3 e^{(2n-3)z} + \ldots + A_{2n-1}e^z.$$

Hieraus aber folgern wir nach bekannten Grundsätzen:

$$A_1 = (-1)^{2n-1}.1 = \overset{2n-1}{A_1}(-1)^{2n-1},$$

$$A_2 = -\left(2^{2n-1} - \frac{2n}{1}\right)(-1)^{2n-1} = -\overset{2n-1}{A_2}(-1)^{2n-1},$$

$$A_3 = \left(3^{2n-1} - \frac{2n}{1}2^{2n-1} + \frac{2n.2n-1}{1.2}\right)(-1)^{2n-1} = \overset{2n-1}{A_3}(-1)^{2n-1}$$

$$A_4 = -\left(4^{2n-1} - \frac{2n}{1}3^{2n-1} + \frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-1} - \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\right).$$

$$(-1)^{2n-1} = -\overset{2n-1}{A_4}(-1)^{2n-1},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_{2n-1} = \Big\{(2n-1)^{2n-1} - \frac{2n}{1}(2n-2)^{2n-1} + \frac{2n.2n-1}{1.2}(2n-3)^{2n-1} - \ldots\ldots$$
$$- \frac{2n\ldots 2n-3}{1.2.3}2^{2n-1} + \frac{2n.2n-1}{1.2}\Big\}(-1)^{2n-1} = \overset{2n-1}{A}_{2n-1}(-1)^{2n-1}.$$

somit für $z = 0$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{2n-1} = -[\overset{2n-1}{A_1} - \overset{2n-1}{A_2} + \overset{2n-1}{A_3} - \ldots + \overset{2n-1}{A}_{2n-1}]$$
$$= 2^{2n}\Big[D^{2n-1}\frac{1}{e^z+1}\Big]_0.$$

Weil nun

$$\Big[D^{2n}\frac{z}{e^z-1}\Big]_0 = -\frac{2n}{2^{2n}-1}\Big[D^{2n-1}(e^z+1)^{-1}\Big]_0,$$

so erhält man ferner

$$\Big[D^{2n}fz\Big]_0 = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\Big[\overset{2n-1}{A_1} - \overset{2n-1}{A_2} + \overset{2n-1}{A_3} - \ldots + \overset{2n-1}{A}_{2n-1}\Big],$$

mithin

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}.2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\Big[\overset{2n-1}{A_1} - \overset{2n-1}{A_2} + \overset{2n-1}{A_3} - \ldots + \overset{2n-1}{A}_{2n-1}\Big]. \qquad \text{II}^a$$

Dieser Ausdruck nimmt eine noch einfachere Gestalt an, wenn man beachtet, dass nach einer bekannten Relation [1]

$$\overset{2n-1}{A_1} = \overset{2n-1}{A}_{2n-1},\quad \overset{2n-1}{A_2} = \overset{2n-2}{A}_{2n-2}\ \ldots\ldots$$
$$\overset{2n-1}{A}_{n-1} = \overset{2n-1}{A}_{n+1}$$

ist. Dadurch nämlich wird

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}.2n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\Big\{\overset{2n-1}{A_1} - \overset{2n-1}{A_2} + \overset{2n-1}{A_3} - \ldots - (-1)^{n-1}\overset{2n-1}{A}_{n-1} + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{A_n}\Big\}$$

oder

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\Big\{\tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{A_n} - \overset{2n-1}{A}_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\overset{2n-1}{A_3} - (-1)^{n-1}\overset{2n-1}{A_2}$$
$$+ (-1)^{n-1}\overset{2n-1}{A_1}\Big\}. \qquad \text{II}^b$$

Zu diesen von Laplace gefundenen und immer aus n Gliedern bestehenden Ausdrücken werden wir später noch einen 3. von Scherk gegebenen Ausdruck hinzufügen.

§. 5.

Fortsetzung.

Schon früher hat — wie wir gesehen — die Theorie der Logarithmen bei unsern Betrachtungen über Bernoulli'sche Zahlen

---

[1]) $\overset{r}{A_k} = \overset{r}{A}_{r-k+1}$ (siehe Lacroix, Traité. III. p. 110; Scherk in Crelle's Journal. Bd. 4. S. 302; Suppl. zum math. Wörtrb. Bd. 1. S. 68.)

uns wesentliche Dienste geleistet. Die Erwägung dieser Thatsache, namentlich aber der Hinblick auf die zwischen den früher durch $A_1, A_2, \ldots. A_n \ldots, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ bezeichneten Coefficienten Statt findende Recursionsformel 3. §. 2.

$$nA_n = na_n + (n-1)\,a_{n-1}A_1 + \ldots. + a_1 A_{n-1}$$

dürfte zu der Vermuthung hinführen, ob nicht auch hier, bei der Ermittlung unabhängiger Ausdrücke für Bernoulli'sche Zahlen, eine ähnliche Hülfe von der Theorie der Logarithmen zu erwarten stände. Und in der That, hat man 3ª. §. 2.

$$\log(1+A_1 u + A_2 u^2 + \ldots) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots a_n u^n + \ldots,$$

so bestimmt sich der Coefficient a_n durch die Formel

$$3^b \ldots. a_n = \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1} \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'}.$$

wo $\mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'}$ die Combinationen mit Wiederholung der Klasse h zur Summe n aus den Grössen (Elementen) $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$, jede Gruppe mit der entsprechenden Permutationszahl multiplicirt ausdrückt. Stellt somit irgend eine der in dem Vorhergehenden aufgefundenen Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen, einen Ausdruck von der Form der obigen Recursionsformel 3. §. 2. dar, so kann man offenbar eine derartige Relation aus einer mit 3ª analogen Gleichung entstanden denken [1]).

Dann aber würde — wie sogleich erhellt — in 3^b ein Mittel zur independenten Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen geboten. Prüfen wir daher in dieser Hinsicht die früher entwickelten Gleichungen, so folgt zunächst aus der Beziehung 4. §. 2. wegen

$$A_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1!}, \quad a_n = -\frac{1}{n}\frac{2^{2n-1}B_n}{1\ldots.2n}$$

33. $$\frac{1}{n} \cdot \frac{2^{2n-1}}{2n!} B_n = \sum_{1,n}^{h} (-1)^h \cdot \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \ldots\right].$$

Weil ferner nach Gleichung 11. die Relation gilt:

$$(-1)^n \cdot \frac{2n}{2.3\ldots2n+2} = -\frac{B_n}{2n!} + \frac{B_{n-1}}{2n-2!} \cdot \frac{1}{3.4} - \ldots\ldots,$$

also

---

[1]) Bekanntlich setzt die Bildung der Formel 3 aus 3ª voraus, dass 3ª zu den convergirenden, stetigen Functionen gehöre. Um daher jedem Einwande zu entgehen, der in Bezug auf Strenge der obigen Ansicht etwa gemacht werden könnte, muss nachgewiesen werden, dass die in Anwendung kommenden Reihen

$$1 + A_1 u + \text{ etc. eine Summe } = e^{\log(1 + A_1 u + \ldots.)}$$

besitzen. Ohne Mühe aber erkennt man die Convergenz dieser Reihen. Und ebenso leicht ersieht man bei etwaigem Zweifel mit Hülfe von 3, dass wirklich die a durch die angeführten Grössen ersetzt werden.

$$A_n = (-1)^n \frac{1}{3.4\ldots.2n+2}, \quad a_n = -\frac{1}{n}\cdot\frac{B_n}{2.3\ldots2n}$$

ist, so ergiebt sich weiter

$$\frac{1}{n}\frac{B_n}{2n!} = \sum_{1,n}^{h}(-1)^h\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^nC'\left[-\frac{1}{3.4}, \frac{1}{3..6}, -\frac{1}{3..8}, \ldots\right] \qquad 34.$$

$$= \sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^nC'\left[-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{3}, -\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{4}, \ldots \ldots(-1)^n\frac{1}{2n+1!}\cdot\frac{1}{n+1}, \ldots\right].$$

Eine andere unabhängige Bildungsformel findet sich aus Gleichung 17, nämlich

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n}-1}{1\ldots2n}B_n = \sum_{1,n}^{h}(-1)^h\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^nC'\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}, -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}, \ldots\right], \qquad 35.$$

da die Beziehungen gelten:

$$A_n' = (-1)^n.\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n!}, \quad a_n = -\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n.$$

Und ein Blick auf 28. zeigt, dass

$$A_n = (-1)^n.\frac{1}{2n!}, \quad a_n = -\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{1.2\ldots..2n},$$

folglich

$$\frac{1}{n}.2^{2n-1}\frac{2^{2n}-1}{2n!}B_n = \sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^nC'\left[-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!}, \ldots\right] \qquad 36.$$

ist.

Endlich schliesst sich an Gleichung 26, diese in der Form

$$-\frac{2B_n}{2n!} + \frac{(2^4-1)2B_{n-1}}{2n-2!}\cdot\frac{1}{3.5.6} - \frac{(2^6-1)2B_{n-2}}{2n-4!}\cdot\frac{1}{3.5..8} + \text{etc.}\ldots$$

$$= (-1)^n.\frac{4n(2^{2n+2}-1)}{3.4.5\ldots.2n+4} = (-1)^n.\frac{n(2^{2n+2}-1)}{3.5.6\ldots..2n+4}$$

betrachtet, die unabhängige Bildungsformel

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2B_n}{2n!} = \sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^nC'\left[-\frac{2^4-1}{3.5.6}, +\frac{2^6-1}{3.5\ldots8}, -\frac{2^8-1}{3.5.6.7..10}, \ldots\right]. \qquad 37.$$

§. 6.

Combinatorische Resultate.

Bei einer nur flüchtigen Betrachtung lassen schon die eben erwähnten combinatorischen Formeln noch einige interessanten Resultate erkennen. So findet sich sogleich durch Vergleichung der Gleichungen 33. und 34:

$$38.\quad 2^{2n-1} = \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5!}, \ldots\right]}.$$

Aus 35. und 36. dagegen entspringt

$$39.\quad 2^{2n-1} = \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}, -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6!}, \ldots\right]}.$$

Und werden 33. und 36. mit einander verglichen, so folgt die von Stern mitgetheilte Formel [1]):

$$40.\quad 2^{2n}-1 = \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \ldots\right]}.$$

Hingegen geben 34. und 35. den Satz:

$$41.\quad 2^{2n}-1 = \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}, -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5!}, -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7!}, \ldots\right]}.$$

Setzt man ferner die Ausdrücke in 38. und 39. oder in 40. und 41. einander gleich, so gewinnt man die neue Beziehung:

$$42.\quad \left\{ \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}, \ldots\right]} = \frac{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \ldots\right]}{\sum\limits_{1,n}^{h}(-1)^h . \frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^n\overset{h}{C'} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5!}, \ldots\right]}. \right.$$

Anmerkung.

Aus den vorstehenden Bemerkungen dürfte man noch den Schluss ziehen, dass die Theorie der Logarithmen, so vorzügliche Mittel sie auch bei der Behandlung der Bernoulli'schen Zahlen darbietet, doch nicht zur Herleitung sämmtlicher Recursionsformeln zwischen diesen Zahlen geeignet scheint.

---

[1]) Crelle, Journal. Bd. 26. S. 88 ff.

Abhängigkeit der Bernoulli'schen Zahlen und der Secantencoefficienten unter einander.

§. 7.

Vorerinnerungen.

Die vorhergehenden Betrachtungen lehrten uns die Eigenschaften der Cotangenten-, Tangenten- und Cosecanten-Coefficienten, d. i. der Bernoulli'schen Zahlen kennen und zwar in doppelter Hinsicht, einmal nämlich, wenn sie mit andern zu derselben Kategorie gehörenden Zahlen in Beziehung traten, ein ander Mal, wenn jede derselben unabhängig von der andern betrachtet wurde. Diese Zahlen aber bieten noch eine andere interessante Seite der Untersuchung dar, dann nämlich, sofern sie mit den Coefficienten der Secantenreihe verglichen werden. Alsdann wird sich zeigen, dass durch die Kenntniss der einen die der anderen Coefficientenart gegeben ist. Da wir nun Formeln finden werden, welche bei ungeradem n die n^{te} Bernoullische Zahl darstellen, bei geradem n hingegen zur Kenntniss des n^{ten} Secantencoefficienten führen, so wird es vortheilhaft sein, diese beiden Fälle an den entsprechenden Zahlen selbst bemerklich zu machen. Wir wollen daher die n^{te} Bernoullische Zahl, also B_n durch B_{2n-1}, den n^{ten} Secantencoefficienten aber durch B_{2n} bezeichnen. Dies vorausgesetzt, bemerken wir zunächst, dass für Zahlenwerthe $x < \frac{\pi}{2}$

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1.2} x^2 + \frac{B_4}{4!} x^4 + \text{etc.} \ldots .$$

ist, wo die Coefficienten B_0, B_2, ... durch die Gleichungen

$$B_0 = 1,$$

$$B_2 = \frac{2.2-1}{1.2} B_0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$B_{2n} = \frac{2n.2n-1}{1.2} B_{2n-2} - \frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4} B_{2n-4} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} . \frac{2n\ldots\ldots 1}{1\ldots\ldots 2n} B_0 \qquad 43.$$

bestimmt werden.

Berücksichtigt man andererseits die bekannte Formel [1])

$$\sec x = \frac{4}{\pi} . \frac{1}{1-\frac{4x^2}{\pi^2}} - \frac{4}{3\pi} . \frac{1}{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}} + \frac{4}{5\pi} . \frac{1}{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}} - \text{etc.} \ldots$$

---

[1]) Euler, Inst. calc. diff. P. 2. §. 225. . . . .

und wendet auf dieselbe die für Zahlenwerth $z < 1$ geltende Gleichung an:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \text{etc.} \ldots\ldots,$$

so folgt nach einigen leichten Operationen die Beziehung:

$$\frac{B_{2n}}{1\ldots 2n} = \frac{2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}}\left[1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots\ldots\right],$$

d. h.

$$\text{III.}\quad \frac{2n+1 \,.\, \pi^{2n+1}}{2^{2n+2} \,.\, 2n+1\,!} B_{2n} = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots\ldots$$

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zu dem uns gesteckten Ziele selbst über.

§. 8.

Stern's Gleichungen.

Ersetzt man nach Stern's Vorgange [1]) in

$$-\log\cos x = \frac{2\,(2^2-1)}{1.2} B_1 u + \frac{2^3\,(2^{2.2}-1)}{1.2.3.4}\frac{B_3}{1.2} u^2 + \text{etc.} \ldots$$

$-\log\cos x$ durch

$$\log\sec x = \log\left(1 + \frac{B_2}{1.2} u + \text{etc.} \ldots.\right)$$

und erinnert sich der Beziehungen 3. und 3ª §. 2. (§. 5.), so folgt die Gleichung

$$44.\quad n\frac{B_{2n}}{2n\,!} = \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1\ldots\ldots 2n} B_{2n-1} + \frac{2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)}{1\ldots\ldots 2n-2} B_{2n-3}\frac{B_2}{1.2}$$
$$+ \frac{2^{2n-5}(2^{2n-4}-1)}{1\ldots 2n-4} B_{2n-5}\frac{B_4}{1\ldots 4} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{2\,(2^2-1)}{1.2} B_1 \,.\, \frac{B_{2(n-1)}}{1\ldots 2n-2},$$

also eine Recursionsformel, welche sämmtliche Bernoulli'sche Zahlen und alle Secantencoefficienten in sich begreift. Wir werden später durch andere Betrachtungen dieselbe Beziehung wieder finden.

Weil nun aber mit dem Bestehen der Gleichungen 3. und 3ª zugleich den beiden andern

$$3^b.\quad a_n = \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1}\frac{1}{h}\, \mathfrak{p}\, {}^{n}\overset{h}{C'}\,[A_1,\, A_2,\, A_3, \ldots].$$

$$3^c.\quad A_n = \sum_{1,n}^{h} \mathfrak{p} \,.\, \frac{{}^{n}\overset{h}{C'}\,[a_1 \,.\, a_2,\, a_3,\, \ldots\ldots]}{1.2.3\ldots\ldots\, h}.$$

[1]) Crelle. Journal. Bd. 26. S. 8.

Realität zuzuschreiben ist, so wird jede Bernoulli'sche Zahl durch die Formel

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1.2....2n} B_{2n-1} = \sum_{1,n}^{h}(-1)^{h-1}\frac{1}{h} \mathfrak{p} \, {}^{n}C'^{h} \left\{\frac{B_2}{1.2}, \frac{B_4}{4!}, \frac{B_6}{6!}, ..\right\} \quad 45.$$

dargestellt, wenn die Secanten-Coefficienten als bekannt vorausgesetzt werden.

Dagegen repräsentirt die Formel

$$\frac{B_{2n}}{2n!} = \sum_{1,n}^{h} \mathfrak{p} \cdot \frac{{}^{n}C'^{h} \left\{\frac{2(2^2-1)}{1.2} B_1, \frac{2^3(2^4-1)}{1...4} B_3, ...\right\}}{1.2.3.4. .... h} \quad 46.$$

jeden Secanten-Coefficienten, wenn man die Bernoulli'schen Zahlen als gegeben ansieht.

Diesen von Stern gegebenen Formeln kann man nach demselben Schriftsteller neue Ausdrücke hinzufügen [1]), indem man von der seit Euler bekannten Gleichung [2])

$$\cos\frac{x\pi}{2n} + \tang\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n} = (1+\frac{x}{n-m})(1-\frac{x}{n+m})(1+\frac{x}{3n-m})(1-\frac{x}{3n+m})..$$

ausgeht. Aus dieser Formel fliesst nämlich durch die Substitutionen $n=2$, $m=1$, $x\pi=u$ zunächst die neue

$$\cos\frac{u}{4} + \tang\frac{\pi}{4}\sin\frac{u}{4} = \cos\frac{u}{4} + \sin\frac{u}{4} = (1+x)(1-\frac{x}{3})(1+\frac{x}{5})(1-\frac{x}{7})...$$

$$= 1 + \frac{u}{4} - \frac{u^2}{4^2}\cdot\frac{1}{2!} - \frac{u^3}{4^3}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{u^4}{4^4}\cdot\frac{1}{4!} + \frac{u^5}{4^5}\cdot\frac{1}{5!} - .....$$

Hieraus aber entspringt durch Logarithmirung

$$\log\left(1 + \frac{u}{4} - \frac{1}{2!}\frac{u^2}{4^2} - \frac{1}{3!}\frac{u^3}{4^3} + \frac{1}{4!}\frac{u^4}{4^4} + \frac{1}{5!}\frac{u^5}{4^5} - \text{etc.}..\right)$$

$$= x\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - .....\right]$$

$$- \frac{x^2}{2}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + ...\right]$$

$$+ \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - ...\right)$$

$$- \frac{x^4}{4}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + ...\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots ,$$

d. g. mit Beachtung der Gleichung III. und der Beziehung

---

[1]) Crelle a. a. O.

[2]) Introductio in analys. inf. §. 171.

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\text{etc.}.=\left[\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\text{etc.}.\right]$$
$$-\frac{1}{2^{2n}}\left[1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+..\right]$$
$$=\frac{2^{2n-1}\,(2^{2n}-1)}{1.2.3.\ldots.2n}\cdot\frac{\pi^{2n}}{2^{2n}}B_{2n-1}$$

$$\log\left[1+\frac{u}{4}-\ldots\right]=\frac{u}{2^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2\,(2^2-1)}{2^2}\,\frac{B_1}{2!}\,u^2+\frac{B_2}{2^4}\cdot\frac{1}{3!}\,u^3$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{2^3\,(2^4-1)}{2^4}\,\frac{B_3}{4!}\,u^4+\text{etc.}\ldots\ldots$$

Deuten wir nun durch $G\left(\frac{n}{2}\right)$ oder einfacher durch $\overline{\frac{n}{2}}$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl an, so wird offenbar der zu u^n gehörende Factor A_n der linken Seite der vorstehenden Gleichung ausgedrückt durch

$$A_n=(-1)\,G\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}=(-1)^{\overline{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}.$$

Der Coefficient von u^n auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens hingegen wird die Bedingungen erfüllen müssen:

$$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{n-1}\,(2^n-1)}{2^{n-1}\,.\,2}\cdot\frac{B_{n-1}}{n!},\ \text{wenn } n \text{ gerade,}$$

$$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{B_{n-1}}{n!},\ \text{wenn } n \text{ ungerade.}$$

Bezeichnen wir nun mit Stern durch k_n einen Factor, der 0 und 1 wird, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl vorstellt, was wir am einfachsten durch $k_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]$ erreichen, so lassen sich die beiden Werthe für a_n in einen zusammenfassen. Von den möglichen Ausdrücken, welche wir alsdann erhalten können, wählen wir gleichfalls nach Stern den folgenden aus:

$$a_n=\frac{1-k_n\,.\,2^n}{2^n-k_n\,(2^n-n)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{B_{n-1}}{n!}\ ^{1)}.$$

---

1) Man könnte für k_n auch die Formen

$$k_n=\frac{2}{4}\left[1+(-1)^n\right],\ k_n=\frac{1}{2a}\left[a+(-1)^n a\right]\ldots.$$

wählen, was allerdings auf $k_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n.\right]$ zurückführt; auch liesse sich k_n in der Form

$$k_n=\sqrt{e}\,.\,e^{-\frac{1}{1+(-1)^n}}=\frac{\sqrt{e}}{e^{\frac{1}{1+(-1)^n}}},$$

Mit Hülfe der von uns schon so oft angewendeten Gleichungen 3. u. 3ª §. 2. (§. 5.) gewinnen wir daher

$$n.(-1)^{G(\frac{n}{2})}\frac{1}{n!}.\frac{1}{4^n} = n.\frac{1-k_n.2^n}{2^n-k_n(2^n-n)}.\frac{1}{2}.\frac{B_{n-1}}{n!}$$
$$+(n-1).\frac{1-k_{n-1}.2^{n-1}}{2^{n-1}-k_{n-1}(2^{n-1}-n+1)}.\frac{1}{2}\frac{B_{n-2}}{n-1!}.\frac{1}{2^2}$$
$$-(n-2).\frac{1-k_{n-2}\,2^{n-2}}{2^{n-2}-k_{n-2}(2^{n-2}-n+2)}.\frac{1}{2}\frac{B_{n-3}}{n-2!}.\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2^4} \quad 47.$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{G(\frac{n-1}{2})}\frac{1}{n-1!}.\frac{1}{2^{2(n-1)}}.\frac{1}{2^2}.B_0,$$

also wiederum eine Recursionsformel, aus welcher sich sowohl die Bernoulli'schen Zahlen, wie die Secantencoefficienten berechnen lassen.

Vereinigt man das letzte Glied der rechten Seite mit dem der linken Seite, so erhält man die einfachere Form:

$$k_n = \frac{1}{\sec\left[\frac{\pi}{4}(1-(-1)^n)\right]} = \cos\left[\frac{\pi}{4}(1-(-1)^n)\right]$$

u. s. f. darstellen.

Für a_n könnte man die Formen

$$a_n = \frac{1}{2}.\frac{B_{n-1}}{n!}\left[k_n\,\frac{1-2^n}{n} + k_{n+1}.\frac{1}{2^n}\right],$$

$$a_n = \frac{1-k_n\left[\frac{1}{n}.2^n(2^n-1)+1\right]}{2^n}.\frac{1}{2}\frac{B_{n-1}}{n!}$$

u. s. w. annehmen. Soll aber der Ausdruck die Form

$$a_n = \frac{1-k_n\mathfrak{A}_n}{1-k_n\mathfrak{B}_n}.\frac{1}{2}\frac{B_{n-1}}{n!}$$

besitzen, wo $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ vorläufig noch unbekannt sind, so muss dieser Ausdruck für ein gerades n den Werth

$$\frac{1}{n}[1-2^n]\frac{1}{2}\frac{B_{n-1}}{n!}$$

und für ein ungerades n den Werth

$$\frac{1}{2^n+1}.\frac{B_{n-1}}{n!}$$

geben. Da also für ein ungerades n

$$k_n\mathfrak{A}_n = k_n\mathfrak{B}_n = 0,$$

so erhält man für ein gerades n die Gleichung

$$\frac{1-k_n\mathfrak{A}_n}{2^n-k_n\mathfrak{B}_n} = \frac{1-2^n}{n},$$

d. h. am einfachsten

$$k_n\mathfrak{A}_n = 2^n,\quad 2^n - k_n\mathfrak{B}_n = n$$

oder $$k_n\mathfrak{B}_n = 2^n - n = k_n(2^n - n).$$

$$
\begin{aligned}
47^{a}\quad & (-k_n)^{\overline{\frac{n}{2}}} \frac{1}{n-1!} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1-k_n 2^n}{2^n - k_n(2^n - n)} \cdot \frac{B_{n-1}}{n-1!} \\
& + (-1)^{\overline{\frac{1}{2}}} \frac{1 - k_{n-1} \,.\, 2^{n-1}}{2^{n-1} - k_{n-1}(2^{n-1} - n + 1)} \cdot \frac{B_{n-2}}{n-2!} \cdot \frac{1}{2^2} \\
& + (-1)^{\overline{\frac{1}{2}\cdot 2}} \frac{1 - k_{n-2} 2^{n-2}}{2^{n-2} - k_{n-2}(2^{n-2} - n + 2)} \frac{B_{n-3}}{n-3!} \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \\
& + \text{etc.} \ldots
\end{aligned}
$$

Weil nun weiter mit dem Bestehen der Gleichung 3. auch die Beziehung 3^b Statt hat, so folgt zugleich die unabhängige Bildungsformel:

$$
48.\quad \frac{1-k_n \,.\, 2^n}{2^n - k_n(2^n - n)} \cdot \frac{B_{n-1}}{n!} = \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1} \frac{1}{h} \, \mathfrak{p} \; {}^{n}C'^{h}\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4^2}, -\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4^3}, \ldots\right].
$$

§. 9.

Ausdruck von Scherk.

Schon in seinen mathematischen Abhandlungen (S. 29) hatte hatte Hr. Prof. Scherk bemerkt, dass man die Bernoulli'schen Zahlen und die Secantencoefficienten nicht als Coefficienten verschiedener Reihenentwicklungen zu betrachten brauche, dass man vielmehr beide Arten von Coefficienten aus der Formel

$$
\text{tang}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right] = \sec x + \text{tang}\, x
$$

erhalten könne. Damals jedoch war Scherk noch der Meinung, dass aus dieser Ansicht keine neuen Formeln resultirten. Später aber zeigte Scherk [1]), zu welchen eleganten Folgerungen die obige Gleichung führt. Ersetzen wir nämlich $\sec x$ und $\text{tang}\, x$ durch die bekannten Reihen, so folgt

$$
\begin{aligned}
49.\quad \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 & + \frac{2^2(2^2-1)}{1.2.} B_1 x + \frac{B_2}{1.2} x^2 \\
& + \frac{2^4(2^4-1)}{1\ldots4} B_3 x^3 + \frac{B_4}{1\ldots4} x^4 + \ldots\ldots \\
& + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1\ldots.2n} B_{2n-1} x^{2n-1} + \frac{B_{2n}}{1\ldots2n} x^{2n} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Zugleich aber ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$
50.\quad \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{x}{2}\Big[D\,\text{tang}\,y\Big]_{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2^2}\Big[D^2\,\text{tang}\,y\Big]_{\frac{\pi}{4}} + \ldots
$$

---

1) Crelle, Journal. Bd. 4. S. 299 ff.

$$+\ldots+\frac{1}{2n-1\,!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}}\left[D^{2n-1}\operatorname{tang}y\right]_{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2n\,!}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}\left[D^{2n}\operatorname{tang}y\right]_{\frac{\pi}{4}}$$
$$+\text{ etc.}\ldots\ldots,$$

wo die angehängte Grösse $\frac{\pi}{4}$ bedeutet, dass nach vollzogener Differentiation $y=\frac{\pi}{4}$ zu schreiben ist. Mithin ergiebt sich aus 49. und 50;

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\left[D^{2n-1}\operatorname{tang}y\right]_{\frac{\pi}{4}}=\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1},$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\left[D^{2n}\operatorname{tang}y\right]_{\frac{\pi}{4}}=B_{2n},$$

d. h. $[D^n \operatorname{tang} y]_{\frac{\pi}{4}}$ stellt für ein ungerades n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl, für ein gerades n aber den n^{ten} Secantencoefficienten dar. Um diesen Ausdruck in entwickelter Form zu erhalten, bedenken wir, dass $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tang}(y+h)$ mit

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{(y+h)i}-e^{-(y+h)i}}{e^{(y+h)i}+e^{-(y+h)i}},\text{ d. i. mit }\frac{1}{i}\left(-1+\frac{2e^{2yi}}{e^{2yi}+e^{-2hi}}\right)$$

gleichbedeutend ist [1]). Wird somit dieser Ausdruck nach Potenzen von h entwickelt, so ergiebt — wie wir wissen — der zu $\frac{h^n}{1\ldots n}$ gehörige Coefficient bald die n^{te} Bernoulli'sche Zahl, bald den n^{ten} Secantencoefficienten. Erwägt man nun weiter, dass durch die Substitutionen $p=-e^{2yi}$, $-2hi=u$ unser Ausdruck die Form

$$\frac{1}{i}\left[-1+\frac{2p}{p-e^u}\right]=\frac{1}{i}\left[-1+\frac{2p}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p-e^u}\right]$$

oder

$$\frac{1}{i}\left[-1+\frac{2e^{2yi}}{e^{2yi}+1}\cdot\frac{-e^{2yi}-1}{p-e^u}\right]=\frac{1}{i}\left[-1+\frac{2e^{2yi}}{e^{2yi}+1}\cdot\frac{p-1}{p-e^u}\right]$$

---

1) Durch Multiplication mit $\frac{e^{(y-h)i}}{e^{(y-h)i}}$ gewinnen wir nämlich zuvörderst

$$\operatorname{tang}(y+h)=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2yi}-e^{-2hi}}{e^{2yi}+e^{-2hi}}=\frac{1}{i}\cdot-\left(\frac{e^{-2hi}-e^{2yi}}{e^{-2hi}+e^{2yi}}\right)$$

und hieraus durch Division

$$\operatorname{tang}(y+h)=\frac{1}{i}\left(-1+\frac{2e^{2yi}}{e^{2yi}+e^{-2hi}}\right).$$

annimmt, so sieht man, dass die Bestimmung des zu $\frac{h^n}{1\ldots n}$ gehörenden Factors nach der bekannten Formel [1])

$$A_n = \frac{\overset{n}{A_1} p^{n-1} + \overset{n}{A_2} p^{n-2} + \ldots + \overset{n}{A_n}}{1.2.3\ldots\ldots n\,(p-1)^n},$$

falls

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_n u^n + \ldots = 1 + \Sigma A_n u^n$$

(für $n = 1, 2, 3, \ldots$), geschehen kann. Die Coefficienten $\overset{n}{A_1}, \overset{n}{A_2} \ldots$ werden dabei definirt durch die Gleichungen

$$\overset{n}{A_1} = 1,$$

$$\overset{n}{A_2} = 2^n - (n+1),$$

$$\overset{n}{A_3} = 3^n - \frac{n+1}{1} \cdot 2^n + \frac{n+1 \cdot n}{1.2},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{n}{A_n} = n^n - \frac{n+1}{1}(n-1)^n + \frac{n+1 \cdot n}{1.2}(n-2)^n - \ldots$$

$$\mp \frac{n+1\ldots 4}{1\ldots\ldots n-2} \cdot 2^n \pm \frac{n+1\ldots\ldots 3}{1\ldots\ldots n-1}.$$

Wird also die fragliche Operation ausgeführt, so folgt zunächst

$$\frac{1}{i}\left(-1 + \frac{2e^{2yi}}{e^{2yi}+1} + \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \Sigma(-i)^n \cdot 2^{n+1} h^n A_n\right) =$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{e^{2yi}-1}{e^{2yi}+1} + \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \Sigma(-i)^n \cdot 2^{n+1} h^n A_n\right) =$$

$$\operatorname{tang} y + \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \Sigma(-1)^n \cdot i^{n-1} \cdot 2^{n+1} h^n A_n \text{ (für } n = 1, 2, 3\ldots)$$

$$= \operatorname{tang}(y+h).$$

Andererseits aber ist dem Taylor'schen Theoreme zufolge

$$\operatorname{tang}(y+h) = \operatorname{tang} y + \Sigma \frac{h^n}{n!} \frac{d^n \operatorname{tang} y}{dy^n},\ n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Mithin erhält man nach bekannten Principien

$$\Sigma \frac{h^n}{n!} D^n \operatorname{tang} y = \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \Sigma(-1)^n \cdot i^{n-1}\, 2^{n+1} h^n A_n,$$

d. g.

$$\frac{h^n}{n!} D^n \operatorname{tang} y = \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \cdot (-1)^n \cdot i^{n-1} \cdot 2^{n+1} \cdot h^n A_n.$$

---

[1]) Euler's Differentialrechnung §. 173. Thl. 2; Suppl. zum math. Wörterb. Bd. 1. v. A—D. S. 67.

Und setzt man jetzt für A_n seinen Werth, so entspringt weiter

$$D^n \operatorname{tang} y = \frac{e^{2yi}}{e^{2yi}+1} \cdot \frac{(-1)^n \,.\, i^{n-1}\, 2^{n+1}}{(p-1)^n} \Big\{ \overset{n}{A}_1 (-1)^{n-1} e^{2y(n-1)i}$$

$$+ \overset{n}{A}_2 (-1)^{n-2} e^{2yi(n-2)} + \ldots + \overset{n}{A}_h (-1)^{n-h} e^{2yi(n-h)} + \ldots + \overset{n}{A}_n \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} .\, i^{n-1}}{\cos y^{n+1}} \Big\{ \overset{n}{A}_1 e^{(n-1)yi} - \overset{n}{A}_2 e^{(n-3)yi} + \ldots + (-1)^{h-1} \overset{n}{A}_h e^{(n-2h+1)yi}$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \overset{n}{A}_n e^{-(n-1)yi} \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\, i^{n-1}}{\cos y^{n+1}} \,.\, R\,,$$

sofern man $e^{(n-1)yi}$ als gemeinsamen Factor vor die Klammer setzt und Zähler und Nenner des Bruches mit $\frac{e^{-(n+1)yi}}{2^{n+1}}$ multiplicirt. Beachten wir weiter die bekannten Eigenschaften

$$\overset{n}{A}_1 = \overset{n}{A}_n\,,\quad \overset{n}{A}_2 = \overset{n}{A}_{n-1}\,,\ \ldots\ \overset{n}{A}_h = \overset{n}{A}_{n-h+1}\,,$$

und multipliciren wir mit $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, so entspringt wegen

$$i^{n-1} \,.\, (-1)^{h-1} = (-1)^{-(h-1)} \,.\, (-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-2h+1}{2}} \text{ etc.}$$

$$(\sqrt{-1})^{n-1} . R = \overset{n}{A}_1 \Big[(-1)^{\frac{n-1}{2}} e^{(n-1)yi} + (-1)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-(n-1)yi}\Big]$$

$$+ \overset{n}{A}_2 \Big[(-1)^{\frac{n-3}{2}} e^{(n-3)yi} + (-1)^{-\frac{n-3}{2}} e^{-(n-3)yi}\Big]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \overset{n}{A}_h \Big[(-1)^{\frac{n-2h+1}{2}} e^{(n-2h+1)yi} + (-1)^{-\frac{n-2h+1}{2}} e^{-(n-2h+1)yi}\Big]$$

$$+ \text{ etc.} \ldots$$

Nun ist aber, wenn r eine ganze Zahl ausdrückt,

$$(-1)^{\pm\frac{1}{2}r} = e^{\pm\frac{1}{2}r\pi i}\,,$$

sonach

$$(-1)^{\frac{1}{2}r}\, e^{ryi} + (-1)^{-\frac{1}{2}r}\, e^{-ryi} = e^{(\frac{1}{2}\pi+y)ri} + e^{-(\frac{1}{2}\pi+y)ri}$$

$$= 2\cos(\tfrac{1}{2}\pi+y)r.$$

Wird diese Beziehung auf $(\sqrt{-1})^{n-1} . R$ angewendet, so verschwinden die imaginären Werthe, und man hat

$$i^{n-1} . R = 2\overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + 2\overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\tfrac{\pi}{2}+y) + \ldots$$

$$+ 2\overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \text{ etc.} \ldots$$

Da ursprünglich die Anzahl der Glieder $= n$ war, gegenwärtig also durch die Vereinigung von je 2 Gliedern h formell

das Intervall von 1 bis $\frac{n}{2}$ zu durchlaufen hat; so wird offenbar das letzte Glied

$$= 2\overset{n}{A}_{\frac{1}{2}n} \cos(n-n+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = 2\overset{n}{A}_{\frac{1}{2}n} \cos(\frac{\pi}{2}+y),$$

oder $= \overset{n}{A}_{\frac{n+1}{2}}$,

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Will man auf die Unterscheidung dieser beiden Fälle nicht eingehen, so kann man die verbundenen Glieder wieder trennen; dadurch gewinnt man

$$i^{n-1}.R = \overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\frac{\pi}{2}+y) + \ldots\ldots$$
$$+ \overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overset{n}{A}_{n-1} \cos(3-n)(\frac{\pi}{2}+y) + \overset{n}{A}_n \cos(1-n)(\tfrac{1}{2}\pi+y).$$

Somit wird

$$D^n \operatorname{tang} y = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \Big\{ \overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\frac{\pi}{2}+y)$$
$$+ \ldots + \overset{n}{A}_{n-1} \cos(3-n)(\frac{\pi}{2}+y) + \overset{n}{A}_n \cos(1-n)(\frac{\pi}{2}+y) \Big\}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \Sigma \overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y),$$

für $h = 1, 2, 3, 4. \ldots\ldots\ldots n.$

Weil aber

$$\frac{1}{2^{2n}}\left[D^{2n} \operatorname{tang} y\right]_{\frac{\pi}{4}} = B_{2n}, \quad \frac{1}{2^{2n-1}}\left[D^{2n-1} \operatorname{tang} y\right]_{\frac{\pi}{4}} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1},$$

d. h. $\displaystyle \frac{1}{2^n}\left[D^n \operatorname{tang} y\right]_{\frac{\pi}{4}} = \frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{\nu n+1} B_n,$

wenn ν den Ausdruck $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ darstellt, so ergiebt sich

$$\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1})}{\nu n+1} B_n = \frac{1}{2^n} \frac{(-1)^{n+1}}{\cos\frac{\pi}{4}^{n+1}} \sum_{1,n}^{h} \overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)\frac{3\pi}{4}.$$

Aber $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$, $\cos(n-2h+1)\frac{3\pi}{4}$

$$= \cos\left\{(n-2h+1)\pi - \frac{(n-2h+1)}{4}\pi\right\}$$
$$= (-1)^{n-2h+1} \cos\frac{n-2h+1}{4}\pi;$$

daher

$$\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{\nu n+1} B_n = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \overset{h}{\underset{1,n}{\Sigma}} \overset{n}{A_h} \cos \frac{n-2h+1}{4}\pi,$$

d. g.

$$B_n = \frac{2(\nu n+1)}{2^{(\nu+\frac{1}{2})(n+1)}[2^{\nu n+1}-1]} \overset{h}{\underset{1,n}{\Sigma}} \overset{n}{A_h} \cos \frac{(n-2h+1)\pi}{4}. \qquad 51.$$

Je nachdem also n eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet, stellt der vorstehende Ausdruck den n^{ten} Secantencoefficienten oder die n^{te} Bernoulli'sche Zahl dar

Schreiben wir für n: $2n-1$, so folgt

$$B_{2n-1} = \frac{2.2n}{2^{3n}(2^{2n}-1)} \overset{h}{\underset{1,2n-1}{\Sigma}} \overset{2n-1}{A_h} \cos \frac{2n-1-2h+1}{4}\pi.$$

Nun ist aber:

$$\overset{2n-1}{A_1} \cos \frac{n-1}{2}\pi = \overset{2n-1}{A_1}\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] = \overset{2n-1}{A_1}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{matrix} 0,\ n=2k; \\ \pm \overset{2n-1}{A_1},\ n=\left\{\begin{matrix}4k+1\\4k-1\end{matrix}\right\}, \end{matrix} \text{ wo } k \text{ eine ganze Zahl ausdrückt,}$$

$$\overset{2n-1}{A_2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2} = \overset{2n-1}{A_2}\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cos 2\frac{\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{2\pi}{2}\right] = -\overset{2n-1}{A_2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{matrix} 0,\ n=2k+1; \\ \mp \overset{2n-1}{A_2},\ n=\left\{\begin{matrix}4k\\4k+2\end{matrix}\right.;\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

$$\overset{2n-1}{A_n}\cos\frac{2n-1-2n+1}{4}\pi = \overset{2n-1}{A_n};\ \ldots\ldots$$

$$\overset{2n-1}{A_{2n-3}}\cos\frac{3-n}{2}\pi = \overset{2n-1}{A_{2n-3}}\left[\cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= -\overset{2n-1}{A_{2n-3}}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$\overset{2n-1}{A_{2n-2}}\cos(2-n)\frac{\pi}{2} = -\overset{2n-1}{A_{2n-2}}\cos\frac{n\pi}{2};$$

$$\overset{2n-1}{A_{2n-1}}\cos(1=n)\frac{\pi}{2} = \overset{2n-1}{A_{2n-1}}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Berücksichtigen wir ausserdem noch die Relation

$\overset{r}{A_h} = \overset{n}{A_{r-h+1}}$, so gewinnen wir

$$B_{2n-1} = \frac{2n}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)}\left\{\frac{1}{2}\overset{2n-1}{A_n} - \overset{2n-1}{A_{n-2}} + \overset{2n-1}{A_{n-4}} - \ldots + (-1)^{\frac{n-2+\nu}{2}} \overset{2n-1}{A_{2-\nu}}\right\}. \qquad \text{II}^\circ$$

Bedeutet n eine gerade Zahl, so enthält dieser Ausdruck $\frac{n}{2}$ Glieder; dagegen besteht er aus $\frac{n+1}{2}$ Gliedern, wenn n ungerade ist.

§. 10.

Analogie in der recurrenten Entwicklung beider Coefficientenarten.

In dem Umstande, dass die beiden Functionen $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ in ihren Entwicklungen in unendliche Reihen und Producte nur durch das Vorzeichen der einzelnen Glieder sich unterscheiden, erblickten wir den Grund für das Erscheinen der Relation 4 aus $l\frac{\sin x}{x}$ und $fx = \frac{e^x+1}{2} f2x$. Und hieraus schlossen wir dann das Statthaben der so wichtigen Beziehung II. Aus ähnlichem Grunde gelang es uns ferner, die von Stern aus $l \cos x$ gefundene Relation 28. mit Hülfe der Gleichung II. zu beweisen. Da nun

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x = 1 + \frac{B_2}{1.2} x^2 + \frac{B_4}{4!} x^4 + \text{etc.} \ldots$$

ist, so dürfte die Vermuthung sehr nahe liegen, ob nicht auch hier eine ähnliche Gleichung, wie bei den Bernoulli'schen Zahlen

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_{2n-1}$$

darstellt, Statt finde. Und in der That, bezeichnen wir $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ mit φx [1]), so erhellt augenblicklich, dass φx für Zahlenwerth $x < \frac{\pi}{2}$ mit $1 + \frac{\varphi^2(0)}{1.2} x^2 + \frac{\varphi^4(0)}{1\ldots4} x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots$ gleichbedeutend ist. Andererseits aber hat man

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots\ldots,}$$

daher

$$1 = [1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} + \ldots][1 + \frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0) + \frac{x^4}{1..4}\varphi^4(0) + \ldots].$$

---

[1]) Nach Gudermann würde bekanntlich $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ mit Sec. x zu bezeichnen sein; für den gegenwärtigen Zweck dürfte die obige Bezeichnungsweise gefälliger aussehen.

Weil nun diese Gleichung für jedes x, welches den Convergenzbedingungen genügt, Gültigkeit besitzt, so müssen offenbar alle mit x behafteten Glieder verschwinden [1]. Wir gewinnen folglich die allgemeine Gleichung

$$\frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!} + \frac{\varphi^{2n-2}(0)}{2n-2!}\,\frac{1}{1.2} + \frac{\varphi^{2n-4}(0)}{2n-4!}\cdot\frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{2n!} = 0,$$

d. h.

$$\varphi^{2n}(0) + \frac{2n.2n-1}{1.2}\varphi^{2n-2}(0) + \frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}\varphi^{2n-4}(0) + \frac{2n\ldots 2n-5}{1\ldots 6}\varphi^{2n-6}(0) \tag{52.}$$

$$+ \ldots + \frac{2n.\,2n-1\ldots\ldots 1}{1.2.3\ldots\ldots 2n} = 0.$$

Setzen wir aber in der bekannten Gleichung 43.

$$B_{2n} - \frac{2n.2n-1}{1.2}B_{2n-2} + \frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}B_{2n-4} - \ldots + (-1)^n\frac{2n\ldots 1}{1\ldots 2n} = 0$$

n als gerade voraus, so folgt allgemein aus 52. und 43.

IV. $$\varphi^{2r}(0) = (-1)^r . B_{2r},$$

eine Gleichung, die man unmittelbar durch Einführung imaginärer Argumente in

$$\sec x = 1 + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1..4}x^4 + \ldots\ldots$$

würde erzielt haben.

§. 11.

Fortsetzung.

Die so eben aufgefundene Beziehung bildet fast überall das Analogon zu Gleichung II. §. 2. Zur Rechtfertigung dieser Behauptung wollen wir die von Scherk gegebenen Formeln 2—7 seiner mathematischen Abhandlungen mit Hülfe des obigen Ausdruckes beweisen. Dabei werden wir Gleichungen erhalten, die in dem einen Falle zur Kenntniss der Secantencoefficienten führen, in dem andern nur Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen liefern.

Gehen wir zunächst von der Gleichung

$$e^x = \frac{e^{2x}+1}{2}\varphi x$$

aus, so kommt

---

[1]) Die Gleichung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.\,\varphi x = 1$$

gilt selbstverständlich für jeden Werth von x; anders aber ist es, wenn statt der geschlossenen Ausdrücke unendliche Reihen gesetzt werden.

$$1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1!}+\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots$$
$$=\left[1+x+\frac{2x^2}{1.2}+\ldots+\frac{2^{2n-2}}{2n-1!}x^{2n-1}+\frac{2^{2n-1}}{2n!}x^{2n}+\ldots\right]$$
$$\left[1+\frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0)+\ldots\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}\varphi^{2n}(0)+\ldots\right].$$

Und stellt man jetzt die Glieder mit x^{2n} zusammen, so entspringt

53.
$$\left\{\begin{aligned}&\varphi^{2n}(0)+\frac{2n.2n-1}{1.2}2\varphi^{2n-2}(0)+\frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots.4}2^3\varphi^{2n-4}(o)+\ldots.\\&+\ldots+\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-3}\varphi^2(0)+(2^{2n-1}-1)=0,\\&\text{d. h.}\\&B_{2n}-\frac{2n.2n-1}{1.2}2B_{2n-2}+\frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}2^3B_{2n-6}-\ldots\ldots.\\&+\ldots-(-1)^n\frac{2n.2n-1}{1.2}2^{2n-3}B_2+(-1)^n(2^{2n-1}-1)=0.\end{aligned}\right.$$

Die Coefficienten von x^{2n+1} dagegen liefern die Relation

54.
$$\begin{aligned}&(2n+1)B_{2n}-\frac{2n+1\ldots 2n-1}{1.2.3}2^2B_{2(n-1)}+\frac{2n+1\ldots 2n-3}{1.2\ldots 5}2^4B_{2n-4}\\&-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1.2n}{1.2}2^{2n-2}B_2+(-1)^n.(2^{2n}-1)=0.\end{aligned}$$

Behandelt man auf gleiche Weise die Gleichung

$$\varphi x=\frac{e^x}{x}(f2x-f4x),$$

so erhält man aus den mit x^{2n} multiplicirten Gliedern die Formel

55.
$$\begin{aligned}-(2n+1)\varphi^{2n}(0)=&\frac{2n+1}{1}2^{2n}(2^{2n}-1)f^{2n}(0)\\&+\frac{2n+1\ldots 2n-1}{1.2.3}2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)f^{2n-2}(0)\\&+\frac{2n+1\ldots 2n-3}{1\ldots 5}2^{2n-4}(2^{2n-4}-1)f^{2n-4}(0)+\ldots\ldots\\&+\frac{2n+1.2n}{1.2}2^2(2^2-1)f^2(0)-(2n+1),\end{aligned}$$

d. h. die 2[te] der von **Scherk** entwickelten Gleichungen. Man kann derselben auch folgende Form geben:

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}\frac{2n}{1}f^2(0)+\frac{2n\ldots 2n-2}{1.2.3}\frac{2^4(2^4-1)}{4}f^4(0)+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{2n\ldots.2}{1\ldots.2n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}f^{2n}(0)+1=-\varphi^{2n}(0),$$

in welcher Form (die Werthe f, φ durch die entsprechenden Grössen B ersetzt) diese Gleichung von **Schlömilch** Seite 17

des Grunert'schen Archivs (Bd. 3.) mittelst bestimmter Integrale bewiesen wurde.

Die Factoren von x^{2n-1} würden wieder zu der Relation 28. führen.

Nimmt man andererseits die Gleichung

$$-x\,e^{-x}\,\varphi x = f\,4\,x - f\,2\,x$$

und entwickelt jede der Functionen nach aufsteigenden Potenzen von x, so gewinnt man aus den Coefficienten von x^{2n} die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n!} f^{2n}(0) &= \frac{\varphi^{2n-2}(0)}{2n-2!} + \frac{\varphi^{2n-4}(0)}{2n-4!}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{\varphi^{2n-6}(0)}{2n-6!}\cdot\frac{1}{5!} \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{2n-1!}, \\ \text{d. i.}\qquad & \\ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} &= \frac{2n-1}{1} B_{2n-2} - \frac{2n-1\,..\,2n-3}{1.2.3} B_{2n-4} \\ &\quad + \frac{2n-1\ldots 2n-5}{1.2.3.4.5} B_{2n-6} - \ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\,.\,\frac{2n-1\ldots\ldots 1}{1\ldots\ldots 2n-1}, \end{aligned}\right\} 56.$$

welches die von Scherk gefundene Relation 4. ist. Auch diese Gleichung hat Schlömilch mittelst bestimmter Integrale bewiesen. Man sehe Grunert's Archiv Bd. 1. S. 363.

Aus den Gliedern mit x^{2n+1} folgt wieder Gleichung 52, d. h. 43. oder Gl. 1. Scherk. Dieselbe Relation würde aus den Factoren von x^{2n+1} der Gleichung

$$x e^{-x}\varphi x = \frac{e^{2x}-1}{2} f 4 x$$

entspringen. Und die Coefficienten von x^{2n} dieser Beziehung würden auf Gleichung 56. zurückführen. Hier hätte man sich der Recursionsformel 7. §. 3, dort der Gleichung 4. §. 2. zu erinnern.

Die 3te der von Scherk mitgetheilten Gleichungen findet sich aus der Gleichung

$$f\,2\,x\,.\,\varphi x = e^{x}\,.\,f\,4\,x$$

und der Relation 6. (4.) §. 2. Man erhält bei bekannter Behandter Behandlung der vorliegenden Gleichung aus den Factoren von x^{2n+1} die Beziehung

$$\begin{aligned} -(2n+1)\,\varphi^{2n}(0) &= \frac{2n+1}{1} 2^{2n+1}\,2^{2n-1} f^{2n}(0) \\ &\quad + \frac{2n+1\,..\,2n-1}{1.2.3.} 2^{2n-1}\,2^{2n-3} f^{2n-2}(0) \\ &\quad + \frac{2n+1\ldots 2n-3}{1\ldots 5} 2^{2n-3}\,2^{2n-5} f^{2n-4}(0) + \ldots - (4n+1). \end{aligned}$$

Vereinigt man aber hiermit Gleichung 6. §. 2, so kommt

$$-(2n+1)\,\varphi^{2n}(0) = \frac{2n+1}{1}\,2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)f^{2n}(0)$$

57.
$$+\frac{2n+1\ldots 2n-1}{1.2.3}\,2^{2n-1}(2^{2n-3}-1)f^{2n-2}(0)$$

$$+\frac{2n+1\ldots 2n-3}{1.2.3.4.5}\,2^{2n-3}(2^{2n-5}-1)f^{2n-4}(0)+\ldots-1,$$

welches die erwähnte Scherk'sche Gleichung ist.

Diese ergiebt sich mithin aus den mit x^{2n+1} behafteten Gliedern der Gleichung

$$f2x.\varphi x - 4fx = \frac{2e^x}{2}f4x - \frac{2^2(e^x+1)}{2}f2x.$$

Verbindet man ferner die Factoren von x^{2n}, so folgt nach gehöriger Reduction eine neue Relation, welcher man nach Gleichung 28. die Form 58. geben kann.

58.
$$\frac{2(2^{2n}-1)}{2n!}B_{2n-1} = \frac{B_{2n}}{2n!} - \frac{2^2}{1.2}B_1\frac{B_{2n-2}}{2n-2!} - \frac{2^4 B_3}{4!}\frac{B_{2n-4}}{2n-4!}$$
$$-\ldots\ldots\ldots-\frac{2^{2n-2}B_{2n-3}}{2n-2!}\frac{B_2}{1.2}.$$

Man könnte jetzt $f4x$ durch $e^{-4x}f(-4x)$ ersetzen und die dann folgende Gleichung

$$f2x.\varphi x = e^{-3x}f(-4x)$$

auf bekannte Weise behandeln. Die Factoren von x^{2n} würden schliesslich zu einer noch nicht angeführten Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen führen. Da jedoch diese Relation sich nicht durch grosse Einfachheit auszeichnet, so unterlassen wir ihre Angabe. Aus gleichem Grunde übergehen wir die Zusammenstellung der mit x^{2n+1} multiplicirten Glieder.

Um Scherk's 5." Gleichung zu erhalten, bedenken wir Folgendes. Es ist

$$-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{2x}(f4x-f2x);$$

gleichzeitig aber gilt die Beziehung

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{d\varphi x}{dx} = -\frac{2x}{e^x+e^{-x}}.\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = -\frac{2x}{e^{2x}+1}.\frac{e^{2x}-1}{2x};$$

daher

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}[f4x-f2x] = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{d\varphi x}{dx}$$

oder

$$\left[x+\frac{2x^2}{1.2}+\frac{2^2x^3}{1..3}+..+\frac{2^{2n-2}x^{2n-1}}{1\ldots 2n-1}+\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{1\ldots 2n}+\ldots.\right]$$

$$\left[-1+\frac{2^2(2^2-1)}{1.2}f^2(0).x+\ldots.+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1\ldots.2n}f^{2n}(0).x^{2n-1}+..\right]$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2x!} + \ldots\right]$$

$$\left[\frac{2x}{1.2}\varphi^2(0) + \frac{4x^3}{4!}\varphi^4(0) + \ldots + \frac{2nx^{2n-1}}{2n!}\varphi^{2n}(0) + \ldots\right],$$

Stellt man nun die Glieder mit x^{2n-1} zusammen und berücksichtigt die Gleichung 17, also

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} f^{2n}(0) + \frac{2n-1}{1.2} 2^{2n-1}(2^{2n-2}-1) f^{2n-2}(0)$$
$$+ \frac{2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4} 2^{2n-1}(2^{2n-4}-1) f^{2n-4}(0) + \ldots + \frac{2^{2n-2}.2n}{2n} = 0,$$

so kommt

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} f^{2n}(0) = \varphi^{2n}(0) + \frac{2n-1.2n-2}{1.2}\varphi^{2n-2}(0) \qquad 59.$$
$$+ \ldots + \frac{2n-1\ldots 2}{1\ldots 2n-2}\varphi^2(0);$$

d. i. die verlangte Gleichung.

Aus den Coefficienten von x^{2n} würde man die Gleichung

$$\frac{(2^{2n}-1)}{2n!} f^{2n}(0) + \frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!} \cdot \frac{1}{1.2.3} f^{2n-2}(0) + \frac{2^{2n-4}-1}{2n-4!}\frac{1}{5!} f^{2n-4}(0)$$
$$+ \ldots\ldots - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2\ldots 2n} = 0,$$

d. h.

$$\frac{2^{2n}-1}{2n!} B_{2n-1} - \frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!}\frac{1}{1.2.3} B_{2n-3} + \frac{2^{2n-4}-1}{2n-4!}\frac{1}{5!} B_{2n-5}$$
$$- \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n!} = 0 \qquad 60.$$

erzielen.

Giebt man der vorhergehenden Gleichung die Form

$$\frac{f4x - f2x}{2}\varphi x = \frac{1}{2} f2x \frac{d.\varphi x}{dx},$$

d. h.

$$\left[-\frac{x}{1.2} + \frac{2(2^2-1)}{1.2} x^2 f^2(0) + \ldots + \frac{2^{2n-3}(2^{2n-2}-1)}{1\ldots 2n-2} x^{2n-2} f^{2n-2}(0)\right.$$
$$\left. + \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1\ldots 2n} x^{2n} f^{2n}(0) + \ldots\right]\left[1 + \frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2n}\varphi^{2n}(0) + \ldots\right]$$
$$= \left[1 - x + \frac{(2x)^2}{1.2} f^2(0) + \ldots + \frac{(2x)^{2n}}{1..2n} f^{2n}(0) + \ldots\right]$$
$$\left[\frac{x}{1.2}\varphi^2(0) + \frac{2x^3}{1..4}\varphi^4(0) + \ldots + \frac{nx^{2n-1}}{1..2n}\varphi^{2n}(0) + \ldots\right],$$

so erkennt man augenblicklich, dass die Coefficienten von x^{2n} die Relation 44. liefern.

Vereinigt man hingegen die mit x^{2n+1} begabten Glieder, so entsteht

$$-\frac{\varphi^{2n}(0)}{1.2.2n!} = \frac{n+1}{2n+2!}\varphi^{2n+2}(0) + \frac{n}{2n!}2^2\varphi^{2n}(0)\frac{f^2(0)}{1.2} + \ldots + \frac{2^{2n}f^{2n}(0)}{2n!}\frac{\varphi^2(0)}{1.2}$$

61. oder

$$\frac{B_{2n}}{2n!} = \frac{n+1}{2n+2!}2B_{2n+2} - \frac{n}{2n!}2^3B_{2n}\frac{B_1}{1.2} - \frac{n-1}{2n-2!}2^5B_{2n-2}\frac{B_3}{4!} - \ldots - \frac{2^{2n+1}B_2}{1.2}\frac{B_{2n-1}}{2n!}$$

$$= \frac{B_{2n+2}}{2n+1!} - \frac{2^2B_{2n}}{2n-1!}\frac{B_1}{1.2} - \ldots - \frac{2^{2n+1}B_2}{1.2}\frac{B_{2n-1}}{2n!}$$

oder

$$\frac{B_{2n}}{2n!} + \frac{2^2B_{2n}}{2n-1!}\frac{B_1}{1.2} + \ldots + \frac{2^{2n}B_2}{1}\frac{B_{2n-1}}{2n!} = \frac{B_{2n+2}}{2n+1!}.$$

Aehnliche Relationen gewinnt man aus der früher erwähnten Gleichung

$$\varphi x = \frac{e^x}{x}(f2x - f4x),$$

wenn man diese mit fx multiplicirt und $e^x fx$ durch $f(-x)$ ersetzt. Entwickelt man dann die einzelnen Glieder von

$$fx\,.\,\varphi x = \frac{f(-x)}{x}(f2x - f4x)$$

nach aufsteigenden Potenzen von x, so erhält man die Relationen:

62.

$$-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1\ldots 2n}f^{2n}(0) = \frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!} + \frac{\varphi^{2n-2}(0)}{2n-2!}\frac{f^2(0)}{1.2} + \frac{\varphi^{2n-4}(0)}{2n-4!}\frac{f^4(0)}{4!} + \ldots + \frac{f^{2n-2}(0)}{2n-2!}\frac{\varphi^2(0)}{1.2}$$

oder

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{1.2.3..2n}B_{2n-1} = \frac{B_{2n}}{2n!} - \frac{B_{2n-2}}{2n-2!}\frac{B_1}{1.2} + \ldots + \frac{B_{2n-3}}{2n-2!}\frac{B_2}{1.2}$$

aus den Coefficienten von x^{2n}

und

63.

$$\frac{\varphi^{2n}(0)}{2n!}\cdot\frac{1}{1.2} = \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{2n+2!}f^{2n+2}(0) + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n!}f^{2n}(0)\frac{f^2(0)}{1.2} + \frac{2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)}{2n-2!}f^{2n-2}(0)\frac{f^4(0)}{4!} + \ldots + \ldots + \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}f^2(0)\frac{f^{2n}(0)}{2n!}$$

aus den Factoren von x^{2n+1}. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{B^{2n}}{2n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{1\ldots.2n+1} B_{2n+1} - \frac{1}{n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1\ldots2n-1} B_{2n-1} \frac{B_1}{1.2} \quad 63^a$$
$$- \ldots\ldots - \frac{2^2(2^2-1)}{1.1} B_1 \frac{B_{2n-1}}{2n!}.$$

An diese Relation schliesst sich Scherk's 6te Gleichung, nämlich:

$$\frac{B_{2n}}{8.2n!} = \frac{(2^{2n-2}+1)(2^2-1)(2^{2n}-1)}{2!\quad 2n!} B_1 B_{2n-1}$$
$$+ \frac{2^2(2^{2n-6}+1)(2^4-1)(2^{2n-2}-1)}{2!\quad 2n-2!} B_3 B_{2n-3} \quad 64.$$
$$+ \ldots\ldots,$$

welche man aus der Gleichung

$$\varphi x = 1 - \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

erzielen wird, wenn man nach 59. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ durch die entsprechenden Reihen ersetzt und nun die Coefficienten von x^{2n} verbindet.

Um endlich die 7te der Scherk'schen Gleichungen zu gewinnen, führen wir auch hier in die von Scherk angegebene Quelle imaginäre Argumente ein. Dadurch wird

$$D \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \varphi x = (\varphi x)^2.$$

Nun ist aber

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \varphi x = [x + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots][1 + \frac{x^2}{1.2}\varphi^2(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!}\varphi^{2n}(0) + \ldots].$$

Werden jetzt die Producte entwickelt, und wird darauf differentiirt, so folgt mit Beachtung der Relation 56:

$$\frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{2n+2} f^{2n+2}(0) = 2\varphi^{2n}(0) + \frac{2n.2n-1}{1.2}\varphi^{2n-2}(0)\varphi^2(0) + \ldots; \quad 65.$$

welches die verlangte Gleichung ist (eigentlich für $n = n-1$).

Wenn wir schliesslich einen Blick auf unsere Methode im Vergleich zu der Scherk'schen werfen, so lässt sich gar nicht leugnen, dass diese, weil sie, dem Princip nach, auf der Möglichkeit beruht, die Secante durch Tangenten und Cosecanten und umgekehrt auszudrücken, oft schneller zum Ziele führt.

Dadurch aber scheint die Aehnlichkeit der Beweisart dieser Relationen mit den bei den Bernoulli'schen Zahlen üblichen Methoden — im Allgemeinen — verloren zu gehen [1]). Bei unserem Gedankengange dagegen beruhen die Beweise (im Wesentlichen) auf zwei analogen Gleichungen, auf

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} . B_{2n-1}$$

und auf

$$\varphi^{2n}(0) = (-1)^{n} . B_{2n}.$$

Und dann liefern die hier vorkommenden Gleichungen fast durchweg zwei Relationen, was bei der von Scherk gebrauchten Methode nicht der Fall sein dürfte.

Wir könnten nun noch die Vergleichung der Bernoulli'schen Zahlen mit den Differenzen-Coefficienten hinzufügen. Da aber diese Darstellung nur eine Wiederholung dessen sein würde, was schon der Urheber dieser Untersuchung, Eytelwein, in den „Abhandlungen der Berliner Academie. Jahrgang 1816—17. S. 28—41." gesagt, ohnedies auch der Raum uns zu beschränkt wird: so übergehen wir diese Betrachtungen, wenden uns vielmehr zu der

— §. 12. —

Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen und der Secanten-Coefficienten durch bestimmte Integrale.

Wenn man die in §. 1. gegebene Definitionsgleichung I. der Bernoulli'schen Zahlen sich etwas genauer ansieht und gleichzeitig sich der aus der Theorie der Gammafunctionen bekannten Formel

$$\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Gamma a}\int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1}\, dx$$

erinnert, so leuchtet augenblicklich die Möglichkeit ein, die Bernoulli'schen Zahlen durch bestimmte Integrale auszudrücken. Und in der That, setzen wir

$$s = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots 2n, \ldots\ldots \text{ und } . a = 2n,$$

so kommt

$$\mathop{S}_1^\infty \frac{1}{s^{2n}} = \frac{1}{\Gamma 2n}\int_0^\infty x^{2n-1}\, dx\left[e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots\ldots\right],$$

d. h.

---

[1]) Ich erinnere z. B. an Klügel's mathem. Wörterb. Suppl. v. A—D Art. Bernoulli'sche Zahlen.

$$S_{2n} = \frac{1}{\Gamma 2n} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^x - 1} \text{ [1]},$$

somit

$$B_n = \frac{1 \ldots 2n}{2^{2n-1}\, \pi^{2n}} \cdot \frac{1}{1 \ldots 2n-1} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2n \cdot}{2^{2n-1}\, \pi^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^x - 1},$$

ein Ausdruck, den schon der grosse Abel in seinen „Oeuvres compl. T. II. pag. 235" anführt.

Man kann den vorliegenden Werth noch vereinfachen, wenn man mit Abel $x = \pi x$ nimmt. Dadurch erhält man die Gleichung

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} B_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^{\pi x} - 1}. \qquad 66.$$

Schreibt man ferner $x = 2x$, so entspringt

$$\frac{1}{4n} B_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^{2\pi x} - 1}. \qquad 67.$$

Da weiter

$$\frac{1}{e^{\pi x} - 1} = \frac{e^{\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1},$$

so ergiebt sich

$$\frac{2^{2n-1} - 1}{2n} B_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{\pi x} + 1 - 2}{(e^{\pi x} + 1)(e^{\pi x} - 1)}\, x^{2n-1}\, dx \qquad 68.$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\, dx}{e^{\pi x} + 1}.$$

Ebenso folgt aus 66. und 67.

$$\frac{2^{2n} - 1}{2 . 2n} B_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{\pi x}}{e^{2\pi x} - 1}\, x^{2n-1}\, dx,$$

oder, falls wir $x = \frac{1}{2} x$ schreiben,

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n} - 1)}{2n} B_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x} - 1}\, x^{2n-1}\, dx,$$

---

[1]) Dass dies Integral Sinn besitzt, folgt natürlich aus der Convergenz der Reihe S_{2n}.

oder wegen

$$\frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}-1} = \frac{1}{e^{\frac{\pi x}{2}} - e^{-\frac{\pi x}{2}}}$$

$$69.\quad \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n} B_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{4n} B_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{\frac{\pi x}{2}} - e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Zu bemerken ist, dass die Ausdrücke 67—69. schon Hr. Prof. Schlömilch in Grunert's Archiv Bd. 3. S. 12. mitgetheilt hat.

Durch dieselbe Methode, vermöge welcher wir die n^{te} Bernoulli'sche Zahl in geschlossener Form darstellten, werden wir auch den n^{ten} Secantencoefficienten in der Form eines bestimmten Integrals ausdrücken können. Denn da

$$\frac{2n+1 \,.\, \pi^{2n+1}}{2^{2n+2} \,.\, 2n+1\,!} B_{2n} = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots\ldots,$$

so folgt

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty x^{2n}\,dx\, [e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \ldots.]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty x^{2n}\,dx\, [e^{-x}(1 + e^{-4x} + e^{-8x} + \ldots + e^{-4nx} + \ldots) - e^{-3x}(1 + e^{-4x} + e^{-8x} + \ldots + e^{-4nx} + \ldots)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty \frac{e^x\, x^{2n}\,dx}{e^{2x}+1};$$

daher, wenn $x = \pi x$ gesetzt wird,

$$B_{2n} = 2^{2n+1} \,.\, 2 \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}\, x^{2n}\,dx}{e^{2\pi x}+1}$$

oder für $x = \frac{1}{2} x$

$$70.\quad B_{2n} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} x^{2n}\,dx}{e^{\pi x}+1} = 2 \int_0^\infty \frac{x^{2n}\,dx}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}$$

Auch dieses Integral hat Schlömilch gegeben in Gr. Archiv. Bd. 1. S. 361.

Anmerkung. Um endlich der Integrale, mit einigen Worten zu gedenken, durch welche Hr. Dr. F. Arndt die Bernoulli'schen Zahlen und den Secantencoefficienten ausdrückte (Gr. Archiv. Thl. 6. S. 438 — 39), bemerken wir, dass diese Integrale aus den vorstehenden durch einfache Rechnungen sich ergeben. Setzt man nämlich in den obigen Integralen

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^x - 1},$$

$$\frac{2^{2n-1}-1}{2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^x + 1},$$

$$\frac{2^{2n}-1}{2.2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\, x^{2n-1}\,dx$$

und

$$\frac{B_{2n}}{2^{2n+2}} \pi^{2n+1} = \int_0^{\infty} \frac{e^x\, x^{2n}\,dx}{e^{2x}+1}$$

statt e^x respective $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sin\varphi}$ und $\tang\varphi$, d. i. vertauscht man x mit $l\frac{1}{x}$, $l\frac{1}{\sin\varphi}$ und $l\tang\varphi$; so gehen die genannten Integrale über in

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^1 \frac{(l\frac{1}{x})^{2n-1}\,dx}{1-x}, \quad 66^0$$

$$\frac{2^{2n-1}-1}{2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^1 \frac{(l\frac{1}{x})^{2n-1}\,dx}{1+x} \ldots, \quad 68^0$$

$$-\frac{2^{2n}-1}{2.2n} B_n \pi^{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l\sin\varphi)^{2n-1}\,d\varphi}{\cos\varphi} \ldots\ldots, \quad 69^0$$

$$\frac{B_{2n}}{2^{2n+2}} \pi^{2n+1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (l\,\mathrm{tg}\,\varphi)^{2n}\,d\varphi \ldots\ldots \quad 70^0.$$

Von diesem letzteren Integrale weicht das von Arndt gegebene (formell) etwas ab, was jedoch nur in der verschiedenen Bedeutung der Secantencoefficienten seinen Grund hat, indem nach Arndt $\frac{B_{2n}}{1\ldots 2n}$ als $n$ter Secantencoefficient anzusehen ist.

§. 13.

v. Staudt's Theorem [1]).

Wir können es nicht unterlassen, unsere Betrachtungen über Bernoulli'sche Zahlen mit einem höchst eleganten Theoreme des Herrn Prof. v. Staudt abzuschliessen. Bekanntlich gehören sämmtliche bis jetzt berechneten Bernoulli'schen Zahlen in die Klasse der Brüche. Sieht man von Strenge ab, so kann man unmittelbar nach Gleichung I. §. 1. diese Thatsache auf die n^{te} Bernoulli'sche Zahl übertragen. Denn $2n!$ enthält — wie man nach dem bekannten Verfahren leicht findet — die Zahl 2 $2n-1$-mal als Factor, wenn $2n = 2^{\nu}$, wo ν eine ganze Zahl, oder aber die Potenz 2^{2n-1} geht nicht in $2n!$ auf, wenn $2n = 2^{\nu_1}\,p$, wo ν_1 und p ebenfalls ganze Zahlen (letztere aber von 2 frei ist) ausdrücken. Setzt man nun $S_{2n} = 1$, was für $n = \infty$ der Fall sein würde, und $\pi^2 = 2.5$, so erkennt man gleich, dass auch die n^{te} Bernoulli'sche Zahl einen Bruch darstellen müsse. Zur völligen Gewissheit aber wird diese oberflächliche Behauptung durch v. Staudt's Lehrsatz erhoben, zugleich aber wird durch dieses Theorem das B_n zu einer ganzen Zahl erzänzende Glied hinzugefügt. Um dasselbe zu beweisen, haben wir folgende Congruenzen zu berücksichtigen.

1. Für beliebige positive ganze Zahlen f, g, a und n ist unmittelbar einleuchtend, dass

$$(f + ga)^n \equiv f^n + nag\,.\,f^{n-1} \pmod{a^2}$$

sein muss. Nimmt man nun für f die Werthe $1, 2, 3 \ldots\ldots a$ und für g $0, 1, 2 \ldots\ldots b-1$, so folgt durch allmähliche Anwendung dieser Congruenz und nachherige Summation

$$S^n(ab) \equiv b\,S^n(a) + na\,S^{n-1}(a)\,S(b-1) \pmod{a^2}.$$

Ist der Modul a, so wird offenbar

$$S^n(ab) \equiv b\,S^n(a) \pmod{a}.$$

2. Von dieser letzten Congruenz ausgehend, können wir behaupten, dass, sofern $a, b, c \ldots l$ Primzahlen unter sich ausdrücken,

$$S^n(abc\ldots l) - bc..l\,S^n(a) - ac\ldots l\,S^n(b) - \ldots abc\ldots S^n(l) \equiv 0 \pmod{abc..l}$$

ist. Mithin muss nothwendig

$$\frac{S^n(abc\ldots l)}{abc\ldots l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{S^n(l)}{l}$$

eine ganze Zahl bezeichnen.

---

[1]) Crelle, Journal. Bd. 21. № 18. S. 372 ff.

3. Stellen ferner a und n beliebige positive Zahlen dar, so ist

$$v^{2n+1} + (a-v)^{2n+1} \equiv (2n+1)\, a v^{2n} \pmod{a^2}.$$

Und setzt man hier für v nach und nach die Werthe 0, 1, 2, ... a, so folgt durch Addition sämmtlicher Resultate

$$2\, S^{2n+1}(a) \equiv (2n+1)\, a\, S^{2n}(a) \pmod{a^2}.$$

Hieraus fliesst weiter

$$2\, S^{2n+1}(a) \equiv 0 \pmod{a},$$

eine Congruenz, die auch für $n = 0$ noch Gültigkeit besitzt.

4. Durch Vertauschung von n mit $n-1$ in dieser letzten Congruenz und von n mit $2n$ in 1, ergiebt sich weiter für beliebige positive ganze a, b

$$S^{2n}(ab) \equiv b\, S^{2n}(a) + 2na\, S^{2n-1}(a)\, S(b-1) \pmod{a^2}$$

und

$$2\, S^{2n-1}(a) \equiv (2n-1)\, a\, S^{2n-2}(a),$$

folglich

$$S^{2n}(ab) \equiv b\, S^{2n}(a) + na(2n-1)\, a\, S^{2n-2}(a)\, S(b-1),$$

d. h.

$$S^{2n}(ab) \equiv b\, S^{2n}(a) \pmod{a^2}.$$

5. Ist ferner r wie a, n eine positive ganze Zahl, so muss

$$\frac{S^{2n}(a^r)}{a^r} - \frac{S^{2n}(a)}{a}$$

eine ganze Zahl vorstellen. Denn ist $r > 1$ [1], so bedeute ϱ ebenfalls eine ganze Zahl. Nun ist nach 4.

$$S^{2n}(a^{\varrho+1}) \equiv a\, S^{2n}(a^{\varrho}) \pmod{a^{2\varrho}},$$

d. h.

$$S^{2n}(a^{\varrho+1}) - a\, S^{2n}(a^{\varrho}) = Ma^{2\varrho} = Ma^{\varrho+1} . a^{\varrho-1};$$

sonach

$$\frac{S^{2n}(a^{\varrho+1})}{a^{\varrho+1}} - \frac{S^{2n}(a^{\varrho})}{a^{\varrho}} = Ma^{\varrho-1}.$$

d. i.

$$\frac{S^{2n}(a^{\varrho+1})}{a^{\varrho+1}} - \frac{S^{2n}(a^{\varrho})}{a^{\varrho}}$$

drückt eine ganze Zahl aus. Wird folglich ϱ successive $= 1$, 2, ... $r-1$ genommen, so erkennt man die Richtigkeit der oben erwähnten Behauptung.

6. Dieser letzte Satz in Verbindung mit 2. führt zu einer neuen Bemerkung. Bezeichnen nämlich wieder a, b, c, ... l Primzahlen zu einander, n, α, β, γ, ... λ aber beliebige positive ganze Zahlen, so ist nach 5.

---

[1] Der Fall $r = 1$ erledigt sich von selbst.

$$\frac{S^{2n}(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda)}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda} - \frac{S^{2n}(abc \ldots l)}{abc \ldots l} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Aber nach 2.

$$\frac{S^{2n}(abc \ldots l)}{abc \ldots l} = \text{einer ganzen Zahl plus } \frac{S^{2n}(a)}{a} + \ldots,$$

daher

$$\frac{S^{2n}(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda)}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{2n}(b)}{b} - \frac{S^{2n}(c)}{c} - \ldots - \frac{S^{2n}(l)}{l}$$

$$= \text{einer ganzen Zahl.}$$

7. Lassen wir jetzt n wieder irgend eine positive ganze Zahl, a aber eine Primzahl sein, und drücken wir endlich durch x eine durch a nicht theilbare Zahl aus, dann ist bekanntlich

$$x^{a-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } a),$$

mithin auch

$$x^{v(a-1)} - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } a).$$

Bezeichnet nun n ein Vielfaches von $a - 1$, ist nämlich $n = v \,.\, a - 1$, so ergiebt sich

$$x^n \equiv 1 \ (\text{mod. } a).$$

Und hieraus folgt durch die allmählichen Substitutionen $x = 1, 2, \ldots\ldots a$ und nachfolgende Vereinigung

$$S^n(a) \equiv a - 1 \equiv -1 \ (\text{mod. } a).$$

Dem Begriffe der Congruenz zufolge muss also im vorliegenden Falle

$$\frac{S^n(a)}{a} + \frac{1}{a} \text{ einer ganzen Zahl gleich sein.}$$

Ist dagegen n nicht durch $a - 1$ theilbar, so erkennt man nach bekannten Congruenzsätzen leicht, dass die Congruenz

$$x^{n+1} \equiv x \ (\text{mod. } a)$$

oder — was zufolge der Natur von x dasselbe —

$$x^n \equiv 1 \ (\text{mod. } a)$$

nicht für jedes x Statt haben kann. Indem aber die Zahlen $x, 2x, 3x \ldots\ldots ax$ in Bezug auf a nur die Reste $1, 2, 3 \ldots\ldots a$ hervorbringen können (selbstverständlich braucht dies nicht in der angegebenen Ordnung Statt zu finden), folgt auf bekannte Weise

$$x^n S^n(a) \equiv S^n(a),$$

d. g.

$$S^n(a) \equiv 0 \ (\text{mod. } a)$$

oder

$$\frac{S^n(a)}{a} = \text{einer ganzen Zahl.}$$